

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES ET FORMES BINAIRES IRRÉDUCTIBLES DE DEGRÉ 3

ARMAND LACHAND

ABSTRACT. Let $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ be an irreducible binary form of degree 3 and h an arithmetic function. We give some estimates for the average order $\sum_{|n_1| \leq x, |n_2| \leq x} h(F(n_1, n_2))$ when h satisfy certain conditions. As an application, we provide some asymptotic formula for the number of y -friable values of $F(n_1, n_2)$ when the variables n_1, n_2 lies in the square $[1, x]^2$ and uniformly in the region $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x$. This improves the result of [BBDT12] in the case of cubic form.

CONTENTS

1. Introduction	1
2. Formes cubiques et normes d'idéaux dans un corps cubique	6
2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux	8
2.2. Notations et définition des idéaux admissibles	8
2.3. Transformation des sommes $S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q)$ en sommes sur des idéaux admissibles	9
3. Sommes de Type I et niveau de distribution	11
3.1. Sommes d'exponentielles	11
3.2. Niveau de distribution de \mathcal{A}	13
3.3. Niveau de distribution de \mathcal{B}	21
4. La fonction de densité σ_q	22
4.1. Définition et premières propriétés	22
4.2. Ordre moyen de σ_q	24
5. Description de la méthode	28
6. Premières applications des estimations de sommes de Type I	39
7. Estimations de sommes de Type II	51
8. Applications	74
8.1. Application aux fonctions de $\mathcal{M}(z)$: preuve du théorème 1.1	74
8.2. Valeurs friables de formes binaires cubiques : preuve du théorème 1.2	74
Références	78

1. INTRODUCTION

Soient $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible et primitive de degré 3 et h une fonction arithmétique. L'objet de cet article est l'obtention de formules asymptotiques de l'ordre

Date: August 12, 2014.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 11N32; Secondary: 11N25, 11N36, 11N37.

moyen

$$S(x; h, F) := \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} h(F(n_1, n_2))$$

pour une certaine classe de fonctions h .

L'intérêt de considérer de telles sommes est multiple. D'un côté, la quantité $S(x; h, F)$ apparaît dans de nombreux problèmes arithmétiques (conjecture de Manin dans [dlBT12] et [dlBT13], crible algébrique (NFS) exposé dans le chapitre 6 de [CP05], etc.). D'autre part, il s'agit d'un angle d'attaque efficace pour étudier l'indépendance entre la propriété arithmétique relative à h et la représentation d'un entier par la forme binaire F . Enfin, les valeurs de F forment un ensemble lacunaire d'entiers, dans la mesure où

$$\frac{\log \# \{n_1, n_2 : |F(n_1, n_2)| \leq x\}}{\log \{|n| \leq x\}} \rightarrow \frac{2}{3} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

et la persistance d'un phénomène arithmétique dans un ensemble de densité nulle est un sujet important de la théorie des nombres à l'origine de nombreuses conjectures.

Greaves [Gre70] initie l'étude de telles sommes en considérant $h = \tau$ la fonction de compte des diviseurs. À partir de la convolution $\tau = 1 * 1$, il montre que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute forme cubique, primitive et irréductible F , il existe des constantes réelles $c_0(F) > 0$ et $c_1(F)$ telles que l'on ait

$$S(x; \tau, F) = c_0(F)x^2 \log x + c_1(F)x^2 + O_{\varepsilon, F}(x^{27/14+\varepsilon}),$$

formule asymptotique précisée par Daniel [Dan99] qui améliore sensiblement le terme d'erreur précédent en le remplaçant par $x^{15/8+\varepsilon}$.

Plus récemment, La Bretèche et Browning [dlBB06] obtiennent une borne supérieure de $S(x; h, F)$ uniforme pour la classe $\mathcal{M}(A, B)$ des fonctions h positives et sous-multiplicatives satisfaisant les inégalités $h(p^k) \leq A^k$ pour tout premier p et $k \geq 1$ et $h(n) \leq B(\varepsilon)n^\varepsilon$ pour tout entier n et tout réel $\varepsilon > 0$. Si l'on omet la dépendance en F rendue explicite dans leurs travaux, le corollaire 1 de [dlBB06] assure que, pour F une forme binaire irréductible de degré $g \geq 2$, $h \in \mathcal{M}(A, B)$ et $x \geq 2$, on a

$$(1.1) \quad S(x; h, F) \ll_{A, B, F} x^2 \prod_{3 < p \leq x} \left(1 + \frac{\gamma_F(p)}{p^2} (h(p) - 1)\right) + x(\log x)^{A^g - 1}$$

où

$$\gamma_F(d) := \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq d : d \mid F(n_1, n_2)\}.$$

On pourra également consulter [dlBT12] pour une généralisation de ce résultat.

Lorsque h est l'indicatrice $1_{\mathcal{E}}$ d'un ensemble d'entiers \mathcal{E} , l'estimation précédente fournit une borne supérieure non triviale lorsque \mathcal{E} est un ensemble criblé. La question de la détermination d'une minoration de $S(x; 1_{\mathcal{E}}, F)$ est en général difficile et dépend fortement de l'ensemble \mathcal{E} en question. Dans cette direction, Greaves considère l'ensemble \mathcal{E}_k des entiers qui ne sont divisibles par aucune puissance k -ième de nombres premiers. Il montre ainsi dans [Gre92] que, pour tout $k \geq 2$ et toute forme cubique primitive et irréductible F , on a la formule asymptotique

$$S(x; 1_{\mathcal{E}_k}, F) = \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_F(p^k)}{p^{2k}}\right) x^2 + O_{F, k}\left(\frac{x^2}{\log x}\right)$$

et obtient également des formules asymptotiques similaires pour des formes F de degré $g \geq 4$ (voir aussi le travail de Browning [Bro11]).

On peut également considérer le choix $\mathcal{E} := S(y)$ de l'ensemble des entiers y -friables, c'est-à-dire

$$S(y) := \{n : P^+(n) \leq y\}$$

où $P^+(n)$ désigne le plus grand facteur premier de l'entier n . Dans toute la suite, le cardinal $S(x; 1_{S(y)}, F)$ est noté $\Psi_F(x, y)$. Son importance dans l'algorithme de factorisation du crible algébrique (NFS) est essentielle et se trouve détaillée dans [CP05] ou [Gra08]. Un raisonnement heuristique permet en particulier de conjecturer que, pour une forme irréductible de degré g , on a la formule asymptotique

$$(1.2) \quad \Psi_F(x, y) \sim x^2 \rho(gu)$$

où $u := \frac{\log x}{\log y}$ est borné et ρ désigne la fonction de Dickman. La démonstration d'un tel résultat dans la cas des formes cubiques constitue la motivation initiale de cet article.

Dans leur étude de $\Psi_F(x, y)$, Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum [[BBDT12], théorème 1] ont montré entre autre que, pour toute forme binaire F de degré g , il existe une constante $\alpha_F \in [0, g[$ telle que, pour tout $\alpha > \alpha_F$, on ait

$$(1.3) \quad \Psi_F(x, x^\alpha) \gg_{F, \alpha} x^2.$$

En particulier, dans le cas où F est une forme cubique irréductible, le théorème 2 de [BBDT12] permet de choisir $\alpha_F = e^{-1/2}$.

Tous ces travaux ont en commun l'emploi récurrent de sommes de Type I, c'est-à-dire des estimations du cardinal

$$N(x, d) = \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq x : d \mid F(n_1, n_2)\}$$

en moyenne sur $d \leq x^{2-\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$. En découpant le carré $[1, x]^2 \cap \mathbf{Z}^2$ en classes de congruences modulo d , on est en droit d'espérer approcher $N(x, d)$ par la quantité $\frac{\gamma_F(d)}{d^2} x^2$. La pertinence d'une telle approximation est notamment étudiée dans [Gre71] où est établie la majoration de sommes, dites de Type I, suivante valide pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{d \leq D} |r_d(x)| \ll_\varepsilon D^\varepsilon (x + D)$$

où

$$(1.4) \quad r_d(x) := N(x, d) - \frac{\gamma_F(d)}{d^2} x^2,$$

estimation par la suite précisée dans le lemme 3.3 de [Dan99] sous la forme

$$(1.5) \quad \sum_{d \leq D} |r_d(x)| \ll x \sqrt{D} (\log 2D)^{7203} + D (\log 2D)^8.$$

Lorsque $h(m)$ présente un caractère oscillant au regard du nombre de facteurs premiers de m comptés avec multiplicité, noté $\Omega(m)$, il n'est en général pas possible de déduire des résultats satisfaisants à partir des seules estimations de sommes de Type I. Ce principe, connu sous le nom de phénomène de parité, a été mis en lumière dans [Sel52] et [Bom76] – on trouvera un survol dans le chapitre 16 de [FI10]. Il stipule essentiellement que les techniques de crible, fondées par construction sur des estimations de sommes de Type I, ne permettent pas d'isoler les valeurs de F ayant un nombre de facteurs premiers dont la parité soit fixée. En principe, il est possible de contourner le phénomène de parité si l'on dispose d'une estimation de sommes de Type II, c'est-à-dire d'une majoration non triviale de sommes de la forme

$$\sum_{U < r \leq 2U} \sum_{V < s \leq 2V} a_r b_s \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq x : rs = F(n_1, n_2)\}$$

pour des choix convenables de U et V , où b_s satisfait une hypothèse de type Siegel-Walfisz, c.-à-d. que le comportement de b_s est suffisamment régulier dans les progressions arithmétiques de petits modules.

Heath-Brown [HB01] établit le premier un tel résultat pour la forme $X_1^3 + 2X_2^3$ à l'aide, entre autres, d'une inégalité de grand crible et de comptage de points sur une hypersurface. Il en déduit l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $n_1^3 + 2n_2^3$ en établissant la formule asymptotique

$$\#\{x < n_1, n_2 \leq x(1 + (\log x)^{-c_0}) : n_1^3 + 2n_2^3 \text{ est premier}\} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} c_1 \frac{x^2}{(\log x)^{c_0+1}}$$

pour une constante $c_0, c_1 > 0$. Une généralisation de ce travail aux valeurs des polynômes de la forme $F(a_1 + X_1q, a_2 + X_2q)$ où $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ est une forme cubique irréductible et $(a_1, a_2, q) = 1$ a été effectuée par Heath-Brown et Moroz [HBM02, HBM04].

Les estimations de Type II obtenues dans [HBM02] ont par la suite été utilisées par Helfgott pour établir la validité de la conjecture de Chowla, bien que les identités combinatoires mises en œuvre soient différentes de celles intervenant dans les travaux de Heath-Brown et Moroz. Dans le théorème principal de [Hel], il montre en particulier la formule suivante, valide pour toute forme irréductible $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ de degré 3, $\varepsilon > 0$ et uniforme en $x \geq 3$,

$$(1.6) \quad \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} \mu(F(n_1, n_2)) \ll_{F, \varepsilon} \frac{(\log_2 x)^4 (\log_3 X)^\varepsilon}{\log x} x^2 = o(x^2)$$

où $\log_k x$ désigne le k -ième logarithme itéré.

Soient $q \geq 1$ et $1 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$. Étant donnée une fonction arithmétique h , une forme binaire F et un compact $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$, on définit

$$S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q) := \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x \\ (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1}} h(F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q))$$

où $\mathcal{K}.x := \{(y_1X, y_2X) : (y_1, y_2) \in \mathcal{K}\}$. On cherche une estimation asymptotique de cet ordre moyen, avec une uniformité en $q \leq (\log x)^A$ pour tout $A > 0$ fixé (c'est-à-dire du type Siegel-Walfisz). À l'aide d'un argument standard de convolution, on pourra en général déduire des informations relatives à $S(x; h, F)$ à partir de $S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q)$.

La méthode développée dans cet article et détaillée dans le paragraphe 5 permet d'obtenir des résultats asymptotiques concernant $S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q)$ pour une large classe de fonctions \mathcal{F} . Le lecteur est renvoyé au début du paragraphe 5 pour une définition précise de l'ensemble \mathcal{F} . Généralisant les travaux de Heath-Brown et Moroz, le résultat central de cet article, à savoir le corollaire 5.3, ramène l'estimation de $S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q)$ à l'étude asymptotique de l'ordre moyen

$$(1.7) \quad \sum_{\substack{j \text{ idéal de } \mathcal{O}_{\mathbf{K}} \\ x < N(j) \leq x(1 + (\log x)^{-c_0(F)})}} h(N(j)) \sigma_q(j)$$

où $c_0(F) > 0$, \mathbf{K} est un corps de nombres cubique dont l'anneau des entiers est noté $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et σ_q est une fonction définie au paragraphe 4.1 dont la série de Dirichlet associée $\sum_j \frac{\sigma_q(j)}{N(j)^s}$ possède un comportement analytique semblable à celui de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ du corps \mathbf{K} .

L'ensemble \mathcal{F} contient en particulier toute fonction h qui s'écrit

$$(1.8) \quad h(m) = \begin{cases} \tilde{h}(m) & \text{si } y_1 \leq P(m) \leq y_2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où \tilde{h} est une fonction multiplicative telle que $\tilde{h}(p) = z$ pour tout premier, $y_1, y_2 \geq 1$, P peut désigner le noyau, le plus petit ou plus grand facteur premier de m et $\tilde{h} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$. Les deux exemples d'application que nous décrivons à présent concernent des fonctions h de cette forme.

Comme première illustration, on considère dans le paragraphe 8.1 l'ensemble $\mathcal{M}(z) \subset \mathcal{F}$ des fonctions h multiplicatives, à valeurs dans le disque unité fermé, et satisfaisant $h(p) = z$ pour tout premier p . Les fonctions $z^{\omega(n)}$, $z^{\Omega(n)}$, la fonction de Möbius μ et la fonction de Liouville λ sont notamment des éléments de cet ensemble. La méthode développée dans cet article, combinée à l'estimation de l'ordre moyen (1.7) dans le paragraphe 4.2, permettra d'établir un ordre moyen de h sur les valeurs de F .

Théorème 1.1. *Soient $A \geq 0$, $\varepsilon > 0$, z un complexe non nul tel que $|z| \leq 1$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire primitive et irréductible de degré 3, $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et $h \in \mathcal{M}(z)$. On a, uniformément en $x \geq 3$, $q \leq (\log x)^A$ et $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$,*

$$(1.9) \quad S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q) = \text{Vol}(\mathcal{K})x^2\sigma_q(F)(3\log x)^{z-1}\frac{\sigma_q(F, h)}{\Gamma(z)} + O\left(\frac{x^2}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}}\right)$$

où $\text{Vol}(\mathcal{K})$ désigne l'aire de \mathcal{K} , $\sigma_q(F)$ et $\sigma_q(F, h)$ sont définies respectivement par (4.9) et (4.21) avec la convention $1/\Gamma(-1) = 1/\Gamma(0) = 0$.

Remarque. Lorsque $h \in \mathcal{M}(-1)$, le théorème 1.1 assure que l'on a la formule

$$S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q) \ll \frac{x^2}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}},$$

ce qui permet de retrouver la formule (1.6) due à Helfgott [Hel] avec un terme d'erreur plus faible en effectuant le choix $h(n) = \mu(n)$.

Dans la seconde application, nous étudions le cardinal

$$\Psi_F^{(1)}(\mathcal{K}.x, Y; a_1, a_2, q) = \#\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K}.x : \gcd(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1 \text{ et } P^+(F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q)) \leq y\},$$

quantité qui intervient directement dans l'algorithme de factorisation du crible algébrique (voir le chapitre 6.2 de [CP05]).

Théorème 1.2. *Soient $\varepsilon > 0$, $A \geq 0$ et $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire primitive et irréductible de degré 3 et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Dans le domaine*

$$(1.10) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y$$

et uniformément pour $q \leq (\log x)^A$ et $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$, on a

$$(1.11) \quad \Psi_F^{(1)}(x, y; a_1, a_2, q) = \frac{x^2}{\zeta_q(2)}\rho(3u) + O\left(\frac{x^2}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

De plus, si (x, y) sont dans le domaine

$$(1.12) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x^{1/2-\varepsilon},$$

alors le terme d'erreur $(\log_2 x)^{-(1-\varepsilon)}$ dans (1.11) peut être remplacé par $x^2 \exp(-(\log_2 x)^{1/2-\varepsilon})$.

Compte tenu de l'estimation

$$\rho(u) = \exp(-u \log u(1 + o(1))) \quad (u \rightarrow +\infty),$$

on observe que le théorème 1.2 ne donne un équivalent de $\Psi_F^{(1)}(x, y; a_1, a_2, q)$ que dans le domaine $\exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y$.

En sommant sur les différentes classes de congruence modulo q et en utilisant une convolution pour enlever la condition de coprimauté, on peut en déduire le corollaire suivant, qui améliore les résultats de [BBDT12] dans le cas des formes cubiques irréductibles, en établissant la validité de (1.2) et en augmentant la région dans laquelle on dispose d'une estimation de $\Psi_F(x, y)$, passant de $u < \sqrt{e}$ à une région non bornée en u .

Corollaire 1.3. *Soient $\varepsilon > 0$ et $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible de degré 3. On a, uniformément dans le domaine (1.10),*

$$(1.13) \quad \Psi_F(x, y) = x^2 \rho(3u) \left(1 + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}}\right)\right).$$

De plus, si (x, y) sont dans le domaine 1.12, alors le terme d'erreur $(\log_2 x)^{-(1-\varepsilon)}$ dans (1.13) peut être remplacé par $\eta^2 x^2 \exp(-(\log_2 x)^{1/2-\varepsilon})$.

Au premier abord, il peut paraître surprenant d'obtenir un résultat plus précis pour les grandes valeurs de u , à savoir $u > 2$. Ceci est dû notamment à la méthode employée : une partie de la contribution des termes impliqués dans l'identité combinatoire introduite dans le paragraphe 5 disparaît lorsque u devient suffisamment grand.

Dans la suite de cet article, on fixe $A > 0$ et l'on suppose $q \leq (\log X)^A$, hypothèse qui sera toujours implicite dans les arguments et les énoncés à venir. On emploie les notations en usage dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à savoir que la lettre c désignera une constante positive et, pour tout paramètre B , la lettre $c(B)$ désignera une fonction de B , l'une et l'autre pouvant varier à chaque occurrence. Il convient de souligner que, dans [HB01], [HBM02], [HBM04], [Hel] et dans le présent travail, les constantes ne sont pas effectives, en raison de l'incidence du zéro de Siegel dans les arguments utilisés pour établir les estimations de sommes de Type II.

L'article présente l'organisation suivante. Au chapitre 2, nous réduisons le problème à l'étude d'une fonction arithmétique sur les idéaux d'un corps cubique \mathbf{K} . Au chapitre 3, nous étudions la distribution multiplicative de certains ensembles d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. Le chapitre 4 contient la définition et les premières propriétés de la fonction de densité σ_q qui intervient dans Un argument combinatoire permet au chapitre 5 d'énoncer le résultat principal de cet article, sous l'hypothèse où la fonction h est bornée. Les chapitres 6 et 7 sont essentiellement consacrés à l'estimation des termes d'erreur qui apparaissent dans la discussion du chapitre 5. Enfin, on illustre la méthode dans le chapitre 8 en l'utilisant pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2.

L'auteur tient à exprimer ici ses sincères remerciements à sa directrice de thèse, Cécile Dartyge, pour son accompagnement sans faille et sa présence attentive lors de la réalisation de ce travail.

2. FORMES CUBIQUES ET NORMES D'IDÉAUX DANS UN CORPS CUBIQUE

En général, un problème de nature multiplicative portant sur les valeurs d'une forme cubique trouve un cadre de traitement plus flexible une fois transcrit dans le langage des corps de nombres. On peut justifier le passage entre forme cubique irréductible et corps de nombres à l'aide du lemme 2.1 de [HBM02].

Lemme 2.1 ([HBM02], lemme 2.1). *Soit $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire cubique, primitive et irréductible. Il existe un corps de nombres réel \mathbf{K} de degré 3, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et des entiers $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- le sous-module $\Lambda(\omega_1, \omega_2) := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2\}$ est de rang 2,
- $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\theta_0)$ où $\theta_0 := \frac{\omega_2}{\omega_1}$,
- si \mathfrak{d} désigne l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ engendré par $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$, $N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}$ la norme de \mathbf{K} sur \mathbf{Q} et N la norme des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, alors

$$(2.1) \quad F(X_1, X_2) = \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(X_1\omega_1 + X_2\omega_2)}{N(\mathfrak{d})}.$$

Réciproquement, l'équation (2.1) définit une forme binaire cubique, primitive et irréductible.

Dans toute la suite, on considère un corps de nombres réel \mathbf{K} de degré 3. On note $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ le monoïde des idéaux entiers non nuls de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, $G(\mathbf{K})$ le groupe des idéaux fractionnaires, $P(\mathbf{K})$ le sous-groupe des idéaux principaux de $G(\mathbf{K})$ et $H(\mathbf{K}) = G(\mathbf{K})/P(\mathbf{K})$ le groupe de classes. On introduit également $h(\mathbf{K})$ le nombre de classes de \mathbf{K} , $\lambda_{\mathbf{K}}$ le résidu de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ en $s = 1$, σ_1 , σ_2 et σ_3 les trois plongements de \mathbf{K} et $r(\mathbf{K}) \in \{1, 3\}$ le nombre de plongements réels. Si $r(\mathbf{K}) = 1$ (resp. $r(\mathbf{K}) = 3$), on désigne par ε_1 l'unité fondamentale satisfaisant $\varepsilon_1 > 1$ (resp. on se donne deux unités fondamentales multiplicativement indépendantes ε_1 et ε_2 telles que $N(\varepsilon_1) = N(\varepsilon_2) = 1$). Dans toute la suite \mathfrak{p} désignera un idéal premier au dessus de p et \mathfrak{i} , \mathfrak{j} , \mathfrak{q} , \mathfrak{r} et \mathfrak{s} des idéaux entiers.

En général, l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ n'est pas principal, d'où l'absence de bijection canonique entre $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}/\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^*$. En reprenant les arguments du paragraphe 6 de [HBM02] (p 275–277), on peut néanmoins faire apparaître une correspondance entre idéaux et entiers algébriques qui sera utilisée dans le paragraphe 7 pour l'étude des sommes de Type II. Le groupe de classes $H(\mathbf{K})$ étant abélien et d'ordre fini $h(\mathbf{K})$, il existe $t \geq 1$ et $h_1, \dots, h_t \geq 1$ tels que

$$h_1 \cdots h_t = h(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad H(\mathbf{K}) \simeq \mathbf{Z}/(h_1\mathbf{Z}) \times \cdots \times \mathbf{Z}/(h_t\mathbf{Z}).$$

Par suite, il existe des idéaux entiers $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_t$ tels que tout idéal fractionnaire non nul \mathfrak{j} se décompose sous la forme $\mathfrak{j} = (\alpha)\mathfrak{a}_1^{l_1} \cdots \mathfrak{a}_t^{l_t}$ où $\alpha \in \mathbf{K}^*$ et $0 \leq l_j < h_j$ pour $j \in \{1, \dots, t\}$. On fixe $\alpha_j \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ tel que $\mathfrak{a}_j^{h_j} = (\alpha_j)$ et γ_j une solution de l'équation algébrique $\gamma_j^{h_j} = \alpha_j$ ce qui permet de construire l'extension $\mathbf{L} := \mathbf{K}(\gamma_1, \dots, \gamma_t)$. Pour tout plongement σ de \mathbf{K} dans \mathbf{C} , on fixe un prolongement à \mathbf{L} , noté encore σ .

En désignant par $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ le sous-groupe multiplicatif de \mathbf{L} engendré par \mathbf{K}^* et $\{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}$, on peut remarquer que l'on a un isomorphisme canonique $\mathcal{I}(\mathbf{K})/\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^* \simeq G(\mathbf{K})$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$, on note (γ) l'idéal de $G(\mathbf{K})$ qui lui est associé par cet isomorphisme et on fixe δ un générateur de \mathfrak{d} . On observe que $N((\gamma)) = \left| \prod_{i=1}^3 \sigma_i(\gamma) \right|$ pour tout $\gamma \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$.

La décomposition de $G(\mathbf{K})$ en classes d'idéaux, intrinsèque à la définition de $H(\mathbf{K})$, induit canoniquement une partition de $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ en $h(\mathbf{K})$ classes d'équivalence, l'ensemble de ces classes étant naturellement muni d'une structure de groupe abélien, compatible avec le produit du corps \mathbf{L} . Pour tout $\gamma \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$, il existe une base entière (u_1, u_2, u_3) de sa classe d'équivalence $\text{Cl}(\gamma)$ c'est-à-dire telle que

$$\text{Cl}(\gamma) \cup \{0\} = \{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3, a_i \in \mathbf{Q}\}.$$

$$(\text{Cl}(\gamma) \cup \{0\}) \cap \mathcal{O}_{\mathbf{L}} = \{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3, a_i \in \mathbf{Z}\}.$$

On note (u_1^*, u_2^*, u_3^*) sa base duale, définie comme l'unique base de $\text{Cl}(\gamma^{-1})$ satisfaisant

$$(2.2) \quad \text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(u_i u_j^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette base duale trouvera son utilité au paragraphe 7 où elle facilitera la détection des congruences dans $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$.

2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux. Conséquence de la théorie des anneaux de Dedekind, l'existence et l'unicité de la décomposition d'un idéal en idéaux premiers permet d'étendre aux éléments de $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ des notions arithmétiques initialement définies sur les anneaux factoriels (voir la note 5 du chapitre 9 de [Nar04]). Aussi les notions de valuation \mathfrak{p} -adique, notée $v_{\mathfrak{p}}$, et de plus grand diviseur commun, déjà utilisée dans la définition de \mathfrak{d} , sont-elles sans équivoque. Dans cette direction, on dira qu'une fonction $g : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{C}$ est multiplicative si $g(j_1 j_2) = g(j_1)g(j_2)$ dès que $(j_1, j_2) = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. Des exemples de fonctions multiplicatives sur les idéaux sont donnés par la fonction de Möbius $\mu_{\mathbf{K}}$ et de la fonction diviseur $\tau_{\mathbf{K}}$ sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, définies comme les fonctions multiplicatives satisfaisant, pour un idéal premier \mathfrak{p} et $k \geq 1$, la formule

$$\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}^k) := \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}^k) := k + 1.$$

On introduit également les fonctions $\Omega_{\mathbf{K}}$ et $\omega_{\mathbf{K}}$ qui comptent le nombre de facteurs premiers avec ou sans leur ordre de multiplicité, définies par

$$\Omega(j) := \sum_{\mathfrak{p}|j} v_{\mathfrak{p}}(j) \quad \text{et} \quad \omega(j) := \# \{\mathfrak{p}|j\}.$$

Étant donné une fonction arithmétique g définie sur \mathbf{Z} , on lui associe naturellement une fonction définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ notée encore g et définie par $g(j) := g(N(j))$. Réciproquement, on associe à une fonction g définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ la fonction $g^{\mathbf{Z}}$ définie par

$$g^{\mathbf{Z}}(n) := \sum_{N(j)=n} g(j).$$

Dans la preuve du lemme 4.2 de [HB01], Heath-Brown énonce les inégalités suivantes, conséquences de la décomposition des idéaux en idéaux premiers,

$$(2.3) \quad \tau_{\mathbf{K}}(j) \leq \tau(N(j))^3 \quad \text{et} \quad \# \{j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(j) = n\} \leq \tau(n)^2.$$

où $\tau := \tau_{\mathbf{Q}}$ désigne la fonction diviseur standard.

Le lemme 6.1 de [HBM02], reformulé ci-dessous, s'inspire de la preuve de Landreau de l'inégalité de Van der Corput relative à la somme des diviseurs (voir [Lan89]) et fournit une première estimation de l'ordre moyen de $\tau_{\mathbf{K}}$ sur les idéaux de la forme $(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)$.

Lemme 2.2 ([HBM02], lemme 6.1). *Soient $x_1 \geq x_2 \geq 1$ et α, β deux éléments de $\mathcal{I}(\mathbf{K}) \cap \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ tels que $\text{Cl}(\alpha) = \text{Cl}(\beta)$. Supposons qu'il existe $r \geq 1$ tel que $|\sigma(\alpha)|, |\sigma(\beta)| \leq x_1^r$ pour tout plongement σ de \mathbf{K} dans \mathbf{C} . Alors, pour tout entier $B \geq 0$, il existe une constante $c(B, r) \geq 0$ telle que*

$$(2.4) \quad \sum_{\substack{|n_1| \leq x_1, |n_2| \leq x_2 \\ n_2 \neq 0}} |\tau_{\mathbf{K}}((n_1 \alpha + n_2 \beta))^B| \ll \tau_{\mathbf{K}}((\alpha) + (\beta))^B x_1 x_2 (\log 2x_1)^{c(B, r)}.$$

2.2. Notations et définition des idéaux admissibles. Comme observé dans le paragraphe 2 de [HBM02], certains nombres premiers présentent un comportement particulier et nécessiteront un traitement spécifique. On dira qu'un nombre premier est **q -singulier** s'il est ramifié dans $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ ou s'il divise q , $N(\omega_1 \omega_2)$ ou l'indice $[\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}[\theta]]$ avec $\theta := \theta_0 N(\omega_1 \mathfrak{d}^{-1})$, et **q -régulier** sinon. On note $P(q) = \max(\{1\} \cup \{p : p \text{ est } q\text{-singulier}\})$. Par extension, un idéal premier \mathfrak{p} est dit **q -singulier** (resp. **q -régulier**) s'il est situé au-dessus d'un nombre premier q -singulier (resp. q -régulier). Un entier ou un idéal dont tous les diviseurs premiers sont q -singuliers (resp. q -réguliers) est également dit **q -singulier** (resp. **q -régulier**). L'unicité de la décomposition en idéaux premiers dans les anneaux de Dedekind permet de définir, pour un idéal j et un entier m , les parties

q -singulières et q -régulières par les formules

$$\begin{aligned} j_{q-r} &:= \prod_{\mathfrak{p} \text{ } q\text{-régulier}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(i)}, & j_{q-s} &:= \prod_{\mathfrak{p} \text{ } q\text{-singulier}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(i)}, \\ m_{q-r} &:= \prod_{p \text{ } q\text{-régulier}} p^{v_p(m)} & \text{et} & \quad m_{q-s} := \prod_{m \text{ } q\text{-singulier}} m^{v_p(m)}. \end{aligned}$$

où v_p désigne la valuation p -adique rationnelle. D'une manière analogue, on définit la composante y -friable et la composante y -criblée par

$$\begin{aligned} j^-(y) &:= \prod_{p \leq y} \prod_{\mathfrak{p} | p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(i)}, & j^+(y) &:= \prod_{p > y} \prod_{\mathfrak{p} | p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(i)}, \\ m^-(y) &:= \prod_{p \leq y} p^{v_p(m)} & \text{et} & \quad m^+(y) := \prod_{p > y} p^{v_p(m)}. \end{aligned}$$

On introduit enfin la **composante p -adique** d'un idéal j , notée j_p , comme l'unique diviseur de j satisfaisant $N(j_p) = p^{v_p(N(i))}$, de sorte que $j = \prod_p j_p$.

Le comportement des idéaux premiers 1-réguliers qui interviennent dans la décomposition des idéaux $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$ fait l'objet du lemme 2.2 de [HBM02].

Lemme 2.3 ([HBM02], lemme 2.2). *Soient n_1 et n_2 deux entiers premiers entre eux, p un nombre premier 1-régulier, \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 deux idéaux premiers au dessus de p tels que \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 divisent $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}$. Alors $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ et $N(\mathfrak{p}_1) = p$.*

Au regard du lemme 2.3, on dira qu'un idéal j est **admissible** si sa partie 1-régulière est de la forme

$$j_{1-r} = \mathfrak{p}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{k_n}$$

où $N(\mathfrak{p}_i)$ est premier et $N(\mathfrak{p}_i) \neq N(\mathfrak{p}_j)$ dès que $1 \leq i < j \leq n$.

2.3. Transformation des sommes $S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q)$ en sommes sur des idéaux admissibles. Soit $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe C^1 par morceaux¹. En recouvrant $\mathcal{K}.x$ en carrés de la forme

$$\mathcal{C}(N_1, N_2) := \{(n_1, n_2) : x\eta N_i \leq n_i < x\eta(N_i + 1) \text{ pour } i = 1, 2\}$$

où $\eta := (\log x)^{-c_0}$ pour une constante $c_0 > 0$ que l'on déterminera *a posteriori* et $0 \leq N_i \leq \eta^{-1}$ pour $i = 1, 2$, on observe que les éléments de \mathcal{K} mis à l'écart par cette approche contribuent de manière négligeable puisque l'on a

$$(2.5) \quad \#\{0 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : \emptyset \subsetneq \mathcal{C}(N_1, N_2) \cap \mathcal{K}.x \subsetneq \mathcal{K}.x\} \ll \eta^{-1}.$$

On définit

$$(2.6) \quad c(N_1, N_2) := |F(N_1\eta, N_2\eta)|.$$

Pour s'assurer que $c(N_1, N_2)$ soit suffisamment grand, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{N}(\eta) := \left\{ 1 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : \mathcal{C}(N_1, N_2) \subset \mathcal{K}.x, (N_1\eta, N_2\eta) \notin \bigcup_{j=0}^2 S(\theta_j) \right\}$$

1. Comme mentionné dans l'introduction de [HB01], l'argument détaillé dans cet article est valide plus généralement pour un compact Jordan-mesurable \mathcal{K} de mesure non nulle.

où θ_1, θ_2 et θ_3 désignent les racines de $F(X_1, 1)$ et

$$S(\theta) := \left\{ 0 \leq y_1, y_2 \leq 1 : |y_1 - y_2\theta| \leq \eta^{\frac{1}{4}} \right\}.$$

On a alors, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,

$$(2.7) \quad c(N_1, N_2) \gg \prod_{j=0}^2 |N_1\eta - N_2\eta\theta_j| > \eta^{\frac{3}{4}}$$

et

$$(2.8) \quad \# \left\{ 0 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : (N_1\eta, N_2\eta) \in \bigcup_{j=0}^2 S(\theta_j) \right\} \ll \eta^{-\frac{7}{4}}.$$

On introduit l'ensemble d'idéaux

$$(2.9) \quad \mathcal{A}(a_1, a_2, q; N_1, N_2) := \left\{ ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} : (n_1, n_2) \in \mathcal{C}(N_1, N_2) \right. \\ \left. \text{et } (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1 \right\}$$

que l'on notera plus simplement \mathcal{A} dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté. En s'inspirant du lemme 2.3 de [HBM02], on peut montrer que les éléments de \mathcal{A} sont tous distincts et que $c(N_1, N_2)q^3x^3$ est la valeur moyenne de $|F|$ sur $\mathcal{C}(N_1, N_2)$.

Lemme 2.4. *On a uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $(n_1, n_2) \in \mathcal{C}(N_1, N_2)$,*

$$(2.10) \quad |F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q)| = c(N_1, N_2)q^3x^3 \left(1 + O\left(\eta^{\frac{1}{4}}\right) \right).$$

De plus, il existe $x_0 \geq 1$ tel que la relation

$$(2.11) \quad \begin{array}{ccc} \{(n_1, n_2) \in \mathcal{C}(N_1, N_2) : (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1\} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (n_1, n_2) & \mapsto & ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} \end{array}$$

induisse une bijection dès que $x \geq x_0$.

Démonstration. La relation (2.10) est une conséquence de la formule de Taylor et de la définition (2.6).

Pour établir le caractère bijectif de la correspondance (2.11), on suppose que (n_1, n_2) et $(m_1, m_2) \in \mathcal{C}(N_1, N_2)$ engendrent le même idéal et l'on considère l'entier algébrique

$$\alpha := \frac{(a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2}{(a_1 + m_1q)\omega_1 + (a_2 + m_2q)\omega_2},$$

inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 2.3 de [HBM02], on observe que $\text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha) = \text{Tr}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha^{-1}) = 3$ dès que x est assez grand ce qui implique que $\alpha = 1$. \square

Compte tenu des observations précédentes, on peut écrire

$$(2.12) \quad S^{(1)}(\mathcal{K}.x; h, F; a_1, a_2, q) = \sum_{(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)} S(\mathcal{A}(a_1, a_2, q; N_1, N_2); h) \\ + \sum_{\substack{0 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} \\ \mathcal{C}(N_1, N_2) \cap \mathcal{K}.x \neq \emptyset \\ (N_1, N_2) \notin \mathcal{N}(\eta)}} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathcal{C}(N_1, N_2)} h(F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q))$$

où

$$(2.13) \quad S(\mathcal{A}; h) := \sum_{j \in \mathcal{A}} h(j).$$

Au vu de (2.5) et (2.8), on s'attend à ce que la contribution de la seconde somme de (2.12) soit négligeable (voir le corollaire 1 de [dlBB06]). Les termes restants fourniront le terme principal et concentreront notre attention dans la suite. Comme souligné dans l'introduction, on verra au paragraphe 5 que la relation (2.10) nous amène à comparer $S(\mathcal{A}(a_1, a_2, q; N_1, N_2); h)$ à la quantité plus régulière $S(\mathcal{B}(q; N_1, N_2); h\sigma_q)$ où σ_q est une fonction de densité qui sera introduite au paragraphe 4,

$$(2.14) \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(q; N_1, N_2) := \{j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : c(N_1, N_2)q^3 x^3 < N(j) \leq c(N_1, N_2)q^3 x^3(1 + \eta)\}.$$

et

$$(2.15) \quad S(\mathcal{B}; h\sigma_q) := \sum_{j \in \mathcal{B}} h(N(j))\sigma_q(j).$$

3. SOMMES DE TYPE I ET NIVEAU DE DISTRIBUTION

Dans cette partie, on étudie la distribution multiplicative des éléments de \mathcal{A} et \mathcal{B} définis par (2.9) et (2.14).

3.1. Sommes d'exponentielles. Étant donné des entiers g_1 et g_2 et un idéal admissible \mathfrak{i} , on considère la somme d'exponentielles

$$S(g_1, g_2; \mathfrak{i}) = S(a_1, a_2, q; g_1, g_2; \mathfrak{i}) := \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{i}) \\ \mathfrak{i} | ((a_1 + n_1 q)\omega_1 + (a_2 + n_2 q)\omega_2) \mathfrak{d}^{-1}}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{i})}\right)$$

où $e(t) := \exp(2i\pi t)$. L'estimation d'une telle quantité constitue un ingrédient de base dans de nombreux travaux relatifs aux formes cubiques (voir par exemple le paragraphe 2.4 de [Gre71] ou le paragraphe 5 de [HB01]) et intervient fréquemment dans la majoration des sommes de Type I.

Une étude de $S(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ s'initie en observant la relation de multiplicativité

$$(3.1) \quad S(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2) = S(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1) S(g_1, g_2; \mathfrak{i}_2)$$

valable dès que $(N(\mathfrak{i}_1), N(\mathfrak{i}_2)) = 1$. Conséquence directe du théorème des restes chinois (voir le lemme 2.1 de [HBM04]), l'identité (3.1) permet essentiellement de ramener l'étude de $S(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ à la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soient \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$ avec $p \nmid qN(\omega_1 \omega_2)$ et $k \geq 1$. On a*

$$S(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} p^k e\left(-\frac{(a_1 g_1 + a_2 g_2)q^{-1}}{p^k}\right) & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où q^{-1} est la solution modulo p^k du système $qq^{-1} \equiv 1 \pmod{p^k}$.

En vue d'établir ce résultat, nous étudions dans un premier temps la somme d'exponentielles

$$S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) := \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{p}^k) \\ (n_1, n_2, p) = 1 \\ \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{p}^k)}\right).$$

Lemme 3.2. *Soient \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$, $p \nmid N(\omega_1 \omega_2)$ et $k \geq 1$.*

Si $(g_1, g_2, p) = 1$, alors on a

$$(3.2) \quad S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} (p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ -p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \parallel (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$ avec $k_0 < k$, alors on a

$$(3.3) \quad S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = p^{k_0} S^{(1)}\left(\frac{g_1}{p^{k_0}}, \frac{g_2}{p^{k_0}}, \mathfrak{p}^{k-k_0}\right).$$

Démonstration. La preuve s'articule essentiellement autour de l'argument développé dans le paragraphe 6 de [Gre70]. On remarque tout d'abord que

$$S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{1 \leq m \leq p^k} N_1(\mathfrak{p}^k, m) e\left(\frac{m}{p^k}\right)$$

où $N_1(\mathfrak{p}^k, m)$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1, n_2, p) = 1, \quad \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) \quad \text{et} \quad g_1 n_1 + g_2 n_2 \equiv m \pmod{p^k}.$$

Pour tout couple (m, m') satisfaisant $(m, p^k) = (m', p^k)$, il existe un entier λ premier à p tel que $m' \equiv \lambda m \pmod{p^k}$. Ainsi, la relation

$$(n_1 \pmod{p^k}, n_2 \pmod{p^k}) \rightarrow (\lambda n_1 \pmod{p^k}, \lambda n_2 \pmod{p^k})$$

définit une bijection de $N_1(\mathfrak{p}^k, m)$ dans $N_1(\mathfrak{p}^k, m')$. Il s'ensuit que

$$(3.4) \quad S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{0 \leq j \leq k} N_1(\mathfrak{p}^k, p^j) \sum_{\substack{1 \leq \lambda \leq p^k \\ (\lambda, p^k) = p^j}} e\left(\frac{\lambda}{p^{k-j}}\right) = N_1(\mathfrak{p}^k, p^k) - N_1(\mathfrak{p}^k, p^{k-1}).$$

Les rôles de g_1 et g_2 étant symétriques, l'hypothèse $(g_1, g_2, p) = 1$ permet de supposer sans perte de généralité que $(g_1, p) = 1$. On peut donc écrire

$$N_1(\mathfrak{p}^k, p^k) = \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k, (n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2), n_1 \equiv -g_2 n_2 g_1^{-1} \pmod{p^k}\}$$

d'où l'on déduit que

$$(3.5) \quad N_1(\mathfrak{p}^k, p^k) = \begin{cases} (p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De manière similaire, les conditions $p \nmid N(\omega_1)$ et \mathfrak{p} non ramifié entraînent que

$$(3.6) \quad \begin{aligned} N_1(\mathfrak{p}^k, p^{k-1}) &= \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k : (n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^k | (p^{k-1} \omega_1 - n_2(g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2)), \\ &\quad n_1 \equiv (p^{k-1} - g_2 n_2) g_1^{-1} \pmod{p^k}\} \\ &= \begin{cases} p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \parallel (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La relation (3.2) est une simple conséquence de (3.4), (3.5) et (3.6).

Supposons à présent que $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$. Sous l'hypothèse $k_0 < k$, on a

$$(3.7) \quad S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{\substack{1 \leq n'_1, n'_2 \leq p^{k-k_0} \\ (n'_1, n'_2, p) = 1}} e\left(\frac{\frac{g_1}{p^{k_0}} n'_1 + \frac{g_2}{p^{k_0}} n'_2}{p^{k-k_0}}\right) N_2(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0})$$

où $N_2(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0})$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1, n_2) \equiv (n'_1, n'_2) \pmod{p^{k-k_0}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2).$$

Puisque \mathfrak{p} n'est pas ramifié, on a

$$\begin{aligned}
 N_2(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0}) &= \# \{0 \leq n_1^*, n_2^* < p^{k_0}, \mathfrak{p}^k \mid ((n'_1 + n_1^* p^{k-k_0})\omega_1 + (n'_2 + n_2^* p^{k-k_0})\omega_2)\} \\
 &= \# \{0 \leq n_1^*, n_2^* < p^{k_0}, \mathfrak{p}^k \mid ((n'_1\omega_1 + n'_2\omega_2) + (n_1^*\omega_1 + n_2^*\omega_2)p^{k-k_0})\} \\
 (3.8) \quad &= \begin{cases} p^{k_0} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-k_0} \mid (u'_1\omega_1 + u'_2\omega_2) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

La relation (3.3) est donc une conséquence directe de (3.7) et (3.8). \square

Preuve du lemme 3.1. Supposons que $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$ et $\mathfrak{p}^{k_1} \parallel (g_2\omega_1 - g_1\omega_2)$, de sorte que $k_0 \leq k_1$. Au vu des hypothèses sur \mathfrak{p} , il vient

$$\begin{aligned}
 S(0, 0, 1; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) &= \sum_{0 \leq j \leq k} \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k \\ (n_1, n_2, p^k) = p^j \\ \mathfrak{p}^k \mid (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{p^k}\right) \\
 (3.9) \quad &= 1 + \sum_{1 \leq j \leq k} S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j).
 \end{aligned}$$

Si $1 \leq j \leq k_0$, on observe que

$$\begin{aligned}
 S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j) &= \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^j, (n_1, n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^j \mid (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\} \\
 (3.10) \quad &= (p-1)p^{j-1}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $k_0 < j \leq k$, on applique le lemme 3.2 pour obtenir que

$$\begin{aligned}
 S^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j) &= p^{k_0} S^{(1)}\left(\frac{g_1}{p^{k_0}}, \frac{g_2}{p^{k_0}}; \mathfrak{p}^{j-k_0}\right) \\
 (3.11) \quad &= \begin{cases} (p-1)p^{j-1} & \text{si } j \leq k_1, \\ -p^{k_1} & \text{si } j = k_1 + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

La combinaison des formules (3.9), (3.10) et (3.11) entraîne alors la relation

$$(3.12) \quad S(0, 0, 1; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} p^k & \text{si } k \leq k_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $(p, q) = 1$, le lemme 3.1 est une conséquence de la formule (3.12) et de la relation

$$S(a_1, a_2, q; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = e\left(-\frac{(a_1 g_1 + a_2 g_2)q^{-1}}{p^k}\right) S(0, 0, 1; g_1 q^{-1}, g_2 q^{-1}; \mathfrak{p}^k).$$

\square

3.2. Niveau de distribution de \mathcal{A} . Dans ce paragraphe, on cherche des estimations, en moyenne sur \mathfrak{i} , du cardinal de

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{i}} := \{j \in \mathcal{A} : \mathfrak{i} \mid j\}.$$

De tels résultats sont obtenus, en moyenne sur des idéaux \mathfrak{i} sans facteur carré, dans le lemme 2.2 de [HBM04]. Nous généralisons ici leur démonstration à des idéaux quelconques en y introduisant l'estimation de sommes d'exponentielles du lemme 3.1.

Pour faciliter le traitement de la partie q -singulière des idéaux, on introduit, pour tout réel $z \geq 1$, l'ensemble d'idéaux

$$\mathcal{M}(z) := \{j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(j_{q-s}) \leq z \text{ et } j \text{ admissible}\}.$$

On omet dans un premier temps la condition $(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1$ en étudiant, pour $\tilde{\eta} \geq 1$ et $x_1, x_2 > 0$, le cardinal de l'ensemble

$$(3.13) \quad \mathcal{S}(\tilde{\eta}, x_1, x_2; a_1, a_2, q; \mathbf{i}) := \{(n_1, n_2) : \tilde{\eta}x_i \leq n_i < \tilde{\eta}(x_i + 1) \text{ pour } i = 1, 2 \\ \text{et } \mathbf{i} | ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}\},$$

noté encore $\mathcal{S}(\mathbf{i})$. En effectuant une partition de $\mathcal{S}(\mathbf{i})$ selon les classes de congruences modulo $N(\mathbf{i})$, on peut écrire

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \#\mathcal{S}(\mathbf{i}) &= \frac{1}{N(\mathbf{i})^2} \sum_{1 \leq g_1, g_2 \leq N(\mathbf{i})} S(g_1, g_2; \mathbf{i}) \sum_{\substack{\tilde{\eta}x_1 \leq n_1 < \tilde{\eta}(x_1+1) \\ \tilde{\eta}x_2 \leq n_2 < \tilde{\eta}(x_2+1)}} e\left(\frac{-g_1n_1 - g_2n_2}{N(\mathbf{i})}\right) \\ &= \frac{S(0, 0; \mathbf{i})}{N(\mathbf{i})^2} (\tilde{\eta}^2 + O(\tilde{\eta})) \\ &\quad + O\left(\sum_{\substack{(g_1, g_2) \neq (0, 0) \pmod{N(\mathbf{i})} \\ |g_1|, |g_2| \leq \frac{N(\mathbf{i})}{2}}} \frac{|S(g_1, g_2; \mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})^2} \min\left(\tilde{\eta}, \frac{N(\mathbf{i})}{|g_1|}\right) \min\left(\tilde{\eta}, \frac{N(\mathbf{i})}{|g_2|}\right)\right). \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition des idéaux admissibles, on peut observer que, pour tout idéal admissible \mathbf{i} et tout premier 1-régulier p , on a

$$(3.15) \quad S(0, 0; \mathbf{i}_p) \in \left\{0, \min\left(p^{v_p(q)} N(\mathbf{i}_p), N(\mathbf{i}_p)^2\right)\right\}$$

tandis que $S(0, 0; \mathbf{i}_p) = 0$ n'est possible que si $p|q$. De plus, en utilisant les bornes supérieures de [[Dan99], lemme 3.1], à savoir, uniformément en p premier et $k \geq 1$,

$$(3.16) \quad \gamma_F(p^k) \ll p^{4k/3} \quad \text{et} \quad \gamma_F(p) = p\nu(p) + O(1),$$

on a, uniformément en p premier et $N(\mathbf{i}_p) > p^{v_p(q)}$,

$$\begin{aligned} S(0, 0; \mathbf{i}_p) &\leq \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathbf{i}_p) : N(\mathbf{i}_p) | F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q)\} \\ &\leq p^{2v_p(q)} \gamma_F(N(\mathbf{i}_p)) \\ &\ll N(\mathbf{i}_p)^{4/3} p^{2v_p(q)}. \end{aligned}$$

Cette estimation, combinée à la la majoration triviale $S(0, 0; \mathbf{i}_p) \leq N(\mathbf{i}_p)^2$ lorsque $N(\mathbf{i}_p) \leq p^{v_p(q)}$ entraîne finalement la borne supérieure, uniforme en p premier,

$$(3.17) \quad S(0, 0; \mathbf{i}_p) \ll N(\mathbf{i}_p)^{4/3} \min(p^{2v_p(q)}, N(\mathbf{i}_p)^{2/3}).$$

Le terme d'erreur relatif aux fréquences non nulles de (3.14) est estimé dans le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soient $B \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x_1, x_2 \geq 0$, $\tilde{\eta} \geq 1$, $z \geq 1$ et $D \geq 1$,*

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \left| \#\mathcal{S}(\mathbf{i}) - \frac{S(0, 0; \mathbf{i})\tilde{\eta}^2}{N(\mathbf{i})^2} \right| \ll (\tilde{\eta} + D)z^{1+\varepsilon}(\log 2D)^{c(B)}$$

Démonstration. Au vu de (3.14), on peut écrire $\Sigma_1 \ll \Sigma_{11} + \Sigma_{12}$ où

$$\Sigma_{11} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \frac{S(0, 0; \mathbf{i})}{N(\mathbf{i})^2} \tilde{\eta}$$

et

$$\Sigma_{12} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \sum_{\substack{(g_1, g_2) \neq (0,0) \pmod{N(\mathbf{i})} \\ |g_1|, |g_2| \leq \frac{N(\mathbf{i})}{2}}} \frac{|S(g_1, g_2; \mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})^2} \min\left(\tilde{\eta}, \frac{N(\mathbf{i})}{|g_1|}\right) \min\left(\tilde{\eta}, \frac{N(\mathbf{i})}{|g_2|}\right).$$

Sous l'hypothèse $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z)$, les relations (3.15), (3.17) et (2.3) entraînent que

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \Sigma_{11} &\leq \tilde{\eta} z \sum_{D < N(\mathbf{i}) \leq 2D} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B}{N(\mathbf{i})} \\ &\ll \tilde{\eta} z (\log 2D)^{c(B)}. \end{aligned}$$

En suivant l'argument développé dans la preuve du lemme 3.1 de [HBM02], on écrit la décomposition $\Sigma_{12} := \Sigma_{13} + \Sigma_{14}$ où la sommation Σ_{13} (resp. Σ_{14}) porte sur les phases (g_1, g_2) satisfaisant $g_1 g_2 = 0$ (resp. $g_1 g_2 \neq 0$). En utilisant successivement le fait que $(N(\mathbf{i}_{q-r}), qN(\omega_1 \omega_2)) = 1$, le lemme 3.1, l'inégalité $\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \ll_{B, \varepsilon} N(\mathbf{i})^\varepsilon$ et (2.3), il vient

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \Sigma_{13} &\ll \tilde{\eta} z \sum_{0 < g \leq D} \frac{1}{g} \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ \mathbf{i}_{q-r} | g}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \\ &\ll \tilde{\eta} z^{1+\varepsilon} \sum_{0 < g \leq D} \frac{\tau(g)^{c(B)}}{g} \\ &\ll \tilde{\eta} z^{1+\varepsilon} (\log 2D)^{c(B)}. \end{aligned}$$

On remarque de même que

$$\begin{aligned} \Sigma_{14} &\ll Dz \sum_{1 \leq |g_1|, |g_2| \leq D} \frac{1}{|g_1 g_2|} \sum_{\substack{D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ \mathbf{i} \in \mathcal{M}(z) \\ \mathbf{i}_{q-r} | g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \\ &\ll Dz^{1+\varepsilon} \sum_{1 \leq |g_1|, |g_2| \leq D} \frac{\tau_{\mathbf{K}}((g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2))^{c(B)}}{|g_1 g_2|}. \end{aligned}$$

En découpant le domaine des variables g_1 et g_2 de manière dyadique et en faisant appel au lemme 2.2, il suit que

$$(3.20) \quad \Sigma_{14} \ll Dz^{1+\varepsilon} (\log 2D)^{c(B)}.$$

Le résultat annoncé est alors une conséquence des estimations (3.18), (3.19) et (3.20). \square

Il est possible de relier $\mathcal{S}(\mathbf{i})$ au cardinal de \mathcal{A}_i par un argument de convolution. En effet, on remarque que la formule d'inversion de Möbius permet d'écrire, sous la condition $(a_1, a_2, q) = 1$, la relation

$$(3.21) \quad \# \mathcal{A}_i = \sum_{(q, d)=1} \mu(d) \# \left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{C}(N_1, N_2) : \mathbf{i} | ((a_1 + n_1 q) \omega_1 + (a_2 + n_2 q) \omega_2) \mathfrak{d}^{-1} \right. \\ \left. \text{et } d | (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) \right\}.$$

Pour tout d premier à q et $i = 1, 2$, on définit l'entier $b_i(d) \in \{1, \dots, d\}$ comme l'unique solution de la congruence $a_i - b_i(d)q \equiv 0 \pmod{d}$. Ceci permet d'introduire la correspondance $(n_1, n_2) \mapsto \left(\frac{n_1 + b_1(d)}{d}, \frac{n_2 + b_2(d)}{d}\right)$ entre

$$\{(n_1, n_2) \in \mathcal{C}(N_1, N_2) : \mathbf{i} | ((a_1 + n_1 q)\omega_1 + (a_2 + n_2 q)\omega_2) \mathfrak{d}^{-1} \text{ et } d | (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q)\}$$

et

$$\mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)$$

où \mathcal{S} est défini par (3.13) et $a_i(d) := \frac{a_i - b_i(d)q}{d}$. Au vu du lemme 3.3 et de la convolution (3.21), on peut ainsi espérer approcher le cardinal de $\mathcal{A}_{\mathbf{i}}$ par

$$\sum_{d \geq 1} \mu(d) \frac{\eta^2 x^2}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)^2} S_d(\mathbf{i})$$

où $S_d(\mathbf{i})$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo $N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)$ tels que

$$\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} | ((a_1(d) + n_1 q)\omega_1 + (a_2(d) + n_2 q)\omega_2) \mathfrak{d}^{-1}$$

si $(d, q) = 1$ et $S_d(\mathbf{i}) = 0$ sinon.

Si $S_1(\mathbf{i}) \neq 0$, le théorème des restes chinois implique que $d \mapsto \frac{S_d(\mathbf{i})}{S_1(\mathbf{i})}$ est multiplicative. Ceci permet de faire apparaître un produit eulérien que l'on décompose en 4 parties selon que $p|q$ ou non, $p|N(\mathbf{i})$ ou non. On obtient alors

$$(3.22) \quad \sum_{d \geq 1} \mu(d) \frac{S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)^2} = \frac{S_1(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})^2} \prod_p \left(1 - \frac{S_p(\mathbf{i}) N((\mathbf{i}, p))^2}{S_1(\mathbf{i}) p^2} \right) = \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{\zeta_q(2) N(\mathbf{i})}$$

où

$$\zeta_q(s) := \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

et α_q est la fonction à support sur les idéaux admissibles définie, pour tout idéal admissible \mathbf{i} , par

$$(3.23) \quad \alpha_q(\mathbf{i}) := \prod_{\substack{p|N(\mathbf{i}) \\ p \nmid q}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \left(\frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)} - \frac{S_p(\mathbf{i}_p) N((\mathbf{i}_p, p)^2)}{p^2 N(\mathbf{i}_p)} \right) \prod_{p|(N(\mathbf{i}), q)} \frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)}.$$

La formule (3.22) demeure vraie si $S_1(\mathbf{i}) = 0$ puisque l'on a alors $S_d(\mathbf{i}) = 0$ pour tout d . On observe que la relation (3.15) et le fait que $N((\mathbf{i}_p, p) = p$ pour tout idéal \mathbf{i} admissible et tout p premier 1-régulier entraînent que l'on a

$$(3.24) \quad \alpha_q(\mathbf{i}_p) = \begin{cases} (1 + p^{-1})^{-1} & \text{si } p \nmid q, \\ 0 \text{ ou } \min(p^{v_p(q)}, N(\mathbf{i}_p)) & \text{si } p|q. \end{cases}$$

De même, les majorations (3.17) et $S_p(\mathbf{i}_p) \leq S_1 \left(\frac{\mathbf{i}_p}{(\mathbf{i}_p, p)} \right)$ permettent d'établir la borne supérieure suivante, uniforme pour p premier et \mathbf{i} admissible,

$$(3.25) \quad \begin{aligned} |\alpha_q(\mathbf{i}_p)| &\leq \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \max \left(\frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)}, \frac{S_p(\mathbf{i}_p) N((\mathbf{i}_p, p)^2)}{p^2 N(\mathbf{i}_p)} \right) \\ &\ll N(\mathbf{i}_p)^{1/3} \min(p^{2v_p(q)}, N(\mathbf{i}_p)^{2/3}). \end{aligned}$$

On déduit finalement de ce qui précède que

$$(3.26) \quad \#\mathcal{A}_i = \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + r(\mathcal{A}, \mathbf{i})$$

où

$$(3.27) \quad |r(\mathcal{A}, \mathbf{i})| \leq \sum_{(d,q)=1} \mu^2(d) \left| \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)^2} \right|.$$

Le lemme suivant montre que, sous la condition $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z)$, on a effectivement le niveau de distribution attendu.

Lemme 3.4. *Soient $B \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $z \geq 1$ et $1 \leq D \leq x^2$,*

$$\Sigma_2 := \sum_{\substack{D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ \mathbf{i} \in \mathcal{M}(z)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B |r(\mathcal{A}, \mathbf{i})| \ll \left(x^{3/2} + x D^{1/2} \right) z^{1+\varepsilon} (\log x)^{c(B)}.$$

Démonstration. Soit $1 \leq \Delta \leq x^{1/2}$ un paramètre qui sera explicité en toute fin de preuve. La formule (3.27) permet d'écrire $\Sigma_2 \ll \Sigma_{21} + \Sigma_{22} + \Sigma_{23}$ où

$$\Sigma_{21} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d \leq \Delta, (d,q)=1}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \left| \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)^2} \right|,$$

$$\Sigma_{22} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d > \Delta, (d,q)=1}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)$$

et

$$\Sigma_{23} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d > \Delta}} \mu^2(d) \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \left| \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N \left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \right)^2} \right|.$$

En écrivant $\mathbf{i} = \mathbf{a}\mathbf{b}$ avec $\mathbf{a} = (\mathbf{i}, d)$, on observe que les facteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} demeurent dans $\mathcal{M}(z)$. L'hypothèse sur Δ entraîne que $\frac{\eta x}{d} \geq 1$ si $d \leq \Delta$ ce qui nous permet d'utiliser le lemme 3.3 avec

les choix $\tilde{\eta} = \frac{\eta x}{d}$ et $x_i = N_i + \frac{b_i(d)}{\eta x}$ pour $i = 1, 2$. On peut ainsi majorer Σ_{21} par

(3.28)

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{\substack{\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathfrak{ab}) \leq 2D \\ d \leq \Delta, (d, q) = 1 \\ N(\mathfrak{a}) | d^3}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{ab})^B \left| \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, N_1 + \frac{b_1(d)}{\eta x}, N_2 + \frac{b_2(d)}{\eta x}; a_1(d), a_2(d), q; \mathfrak{b} \right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathfrak{ab})}{d^2 N(\mathfrak{b})^2} \right| \\ & \ll \sum_{d \leq \Delta} \sum_{N(\mathfrak{a}) | d^3} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{a})^B \left(\frac{D}{N(\mathfrak{a})} + \frac{x}{d} \right) z^{1+\varepsilon} (\log x)^{c(B)} \\ & \ll z^{1+\varepsilon} (x + D) (\log x)^{c(B)} \sum_{d \leq \Delta} \tau(d)^{c(B)} \end{aligned}$$

(3.29)

$$\ll \Delta z^{1+\varepsilon} (x + D) (\log x)^{c(B)}.$$

À l'aide du lemme 2.2, on dispose de l'estimation

$$\begin{aligned} \Sigma_{22} & \ll \sum_{d > \Delta} \tau(d)^{c(B)} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq q(x+1)/d} \tau_{\mathbf{K}}((n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2))^{c(B)} \\ (3.30) \quad & \ll x^2 \Delta^{-1} (\log x)^{c(B)}. \end{aligned}$$

Enfin, en reprenant la décomposition $\mathfrak{i} = \mathfrak{ab}$ introduite pour Σ_{21} et en écrivant $d = N(\mathfrak{a}_{1-r})e$, on remarque que $d \asymp N(\mathfrak{a})e$ et $S_d(\mathfrak{i}) \leq N(\mathfrak{b})z$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \Sigma_{23} & \ll z x^2 \sum_{\substack{\mathfrak{ab} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathfrak{ab}) \leq 2D}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{ab})^B}{N(\mathfrak{a})^2 N(\mathfrak{b})} \sum_{e \gg \Delta N(\mathfrak{a})^{-1}} \frac{1}{e^2} \\ & \ll \Delta^{-1} z x^2 \sum_{\substack{\mathfrak{ab} \in \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathfrak{ab}) \leq 2D}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{ab})^B}{N(\mathfrak{ab})} \\ (3.31) \quad & \ll \Delta^{-1} z x^2 (\log x)^{c(B)}. \end{aligned}$$

En combinant les estimations (3.29), (3.30) et (3.31), il suit

$$\Sigma_2 \ll (\Delta^{-1} z x^2 + \Delta(x + D) z^{1+\varepsilon}) (\log x)^{c(B)}.$$

Le choix $\Delta = \min(x^{1/2}, x D^{-1/2})$ conduit au résultat annoncé. \square

Au vu de la définition de $\mathcal{M}(z)$, on peut montrer que la contribution des éléments de \mathcal{A}_i où $i \notin \mathcal{M}(z)$ est négligeable lorsque z est convenablement choisi.

Lemme 3.5. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $1 \leq D \leq x^2$,*

$$\Sigma_3 := \sum_{D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i})| \ll \left(x^{15/8} + x^{7/4} D^{1/8} \right) (\log x)^{c(B)},$$

où les $r(\mathcal{A}, \mathfrak{i})$ sont définis par (3.26).

Démonstration. Au regard du lemme 2.3 et de la définition de α_q pour les idéaux non admissibles, on observe que la somme Σ_3 ne porte que sur les idéaux admissibles.

On remarque dans un premier temps que les relations (2.3) et (1.4) entraînent

$$(3.32) \quad \sum_{\substack{i \notin \mathcal{M}(z) \\ D < N(i) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \# \mathcal{A}_i \ll \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq q(x+1) : d \mid F(n_1, n_2)\} \\ \ll q^2 x^2 \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} + \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} |r_d(q(x(1+\eta)+1))|.$$

La première somme du membre de droite peut être majorée à l'aide de l'inégalité

$$(3.33) \quad \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \leq \sum_{\substack{z < d_1 \leq 2D \\ d_1 \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d_1)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d_1)}{d_1^2} \sum_{d_2 \leq \frac{2D}{d_1}} \tau(d_2)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d_2)}{d_2^2}.$$

En utilisant les estimations (3.16), on obtient pour la somme sur d_2 la borne supérieure, uniforme en $D \geq 2$,

$$(3.34) \quad \sum_{d \leq D} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \ll \prod_{p \leq D} \left(1 + 2^{c(B)} \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) \\ \ll \prod_{p \leq D} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{c(B)} \\ \ll (\log 2D)^{c(B)}.$$

En combinant (3.16) à la méthode de Rankin, on observe pour la somme en d_1 que

$$(3.35) \quad \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \ll \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\tau(d)^{c(B)}}{d^{2/3}} \left(\frac{d}{z}\right)^{1/2} \\ \ll z^{-1/2} (\log x)^{c(B)}$$

où l'on a utilisé le fait que $\omega(q) \ll \log_2 x$ dans la dernière estimation. On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de (1.5), du lemme 2.2 et de (3.34) que l'on peut estimer le terme de reste de (3.32) par

$$(3.36) \quad \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} |r_d(qx)| \leq \left(\sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} |r_d(qx)| \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} |r_d(qx)| \right)^{1/2} \\ \ll x \left(x^{1/2} D^{1/4} + D^{1/2} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

En combinant les majorations (3.32), (3.33), (3.35) et (3.36), on obtient finalement l'estimation

$$(3.37) \quad \sum_{\substack{i \notin \mathcal{M}(z) \\ D < N(i) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \# \mathcal{A}_i \ll \left(\frac{x^2}{z^{1/2}} + x^{3/2} D^{1/4} + x D^{1/2} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

En utilisant la multiplicativité de α_q et les estimations (3.24) , (3.25) et (3.35), on a d'autre part que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathbf{i} \notin \mathcal{M}(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} &\ll \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \sum_{N(\mathbf{i})=d} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \\
&\ll \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d)^{c(B)} \sum_{N(\mathbf{i})=d} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (\log x)^{c(B)} \\
&\ll z^{-1/2} (\log x)^{c(B)} \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d)^{c(B)} d^{-1/6} \\
(3.38) \quad &\ll z^{-1/2} (\log x)^{c(B)}.
\end{aligned}$$

On obtient finalement le résultat escompté en utilisant le lemme 3.4 avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, les estimations (3.37) et (3.38) et en choisissant $z = \min(x^{1/4}, x^{1/2} D^{-1/4})$. \square

En conclusion de notre étude relative à la distribution multiplicative de \mathcal{A} , nous considérons le cardinal de

$$\mathcal{A}_{\mathbf{i},d} := \{\mathbf{j} \in \mathcal{A}_{\mathbf{i}} : d | N(\mathbf{j}\mathbf{i}^{-1})\}$$

où d est sans facteur carré. Suivant l'argument développé à la page 265 de [HBM02], le principe d'inclusion-exclusion permet d'écrire la formule

$$(3.39) \quad \mu(d) \sum_{\substack{\mathbf{j}_1 | (\mathbf{j}_2, d) \\ d | N(\mathbf{j}_1)}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } d | N(\mathbf{j}_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Compte tenu du lemme 3.5, la relation (3.39) suggère d'écrire

$$(3.40) \quad \#\mathcal{A}_{\mathbf{i},d} = \mu(d) \sum_{\substack{\mathbf{j} | d \\ d | N(\mathbf{j})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \#\mathcal{A}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} = \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathbf{i}) \gamma_q(\mathbf{i}, d)}{N(\mathbf{i})} + r(\mathcal{A}, \mathbf{i}, d)$$

où

$$(3.41) \quad \gamma_q(\mathbf{i}, d) = \begin{cases} \mu(d) \sum_{\substack{\mathbf{j} | d \\ d | N(\mathbf{j})}} \frac{\mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \alpha_q(\mathbf{i}\mathbf{j})}{\alpha_q(\mathbf{i}) N(\mathbf{j})} & \text{si } \alpha_q(\mathbf{i}) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$(3.42) \quad |r(\mathcal{A}, \mathbf{i}, d)| \leq \sum_{\substack{\mathbf{j} | d \\ d | N(\mathbf{j})}} \mu^2(d) \left| \#\mathcal{A}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathbf{i}\mathbf{j})}{N(\mathbf{i}\mathbf{j})} \right|.$$

Il s'ensuit que, si $\alpha_q(\mathbf{i}) \neq 0$, la fonction arithmétique $\gamma_q(\mathbf{i}, \cdot)$ est multiplicative et à support sur les entiers sans facteur carré. Pour p un nombre premier q -régulier, on a notamment par (3.24) que

$$(3.43) \quad \gamma_q(\mathbf{i}, p) = \begin{cases} \frac{1}{p} \frac{\nu_p}{1+p} & \text{si } p | N(\mathbf{i}), \\ \frac{\nu_p}{1+p} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où ν_p est le nombre d'idéaux \mathfrak{p} tels que $N(\mathfrak{p}) = p$. De plus, si $p|q$ est 1-régulier, alors

$$(3.44) \quad \gamma_q(\mathbf{i}, p) \in \left\{0, \frac{1}{p}, 1\right\}.$$

Dans le cas où $\mathfrak{i} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, on pose $\gamma_q(d) = \gamma_q(\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, d)$ pour tout entier $d \geq 1$.

Lemme 3.6. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $1 \leq D \leq x^2$,*

$$\Sigma_3 := \sum_{\substack{\mathfrak{i}, d \\ D < N(\mathfrak{i})d \leq 2D}} \mu_{\mathbf{K}}(d)^2 \tau(N(\mathfrak{i})d)^B |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, d)| \ll \left(x^{15/8} + x^{7/4} D^{1/8}\right) (\log x)^{c(B)}.$$

Démonstration. Puisque la sommation (3.42) ne fait intervenir que des idéaux \mathfrak{j} admissibles et des entiers d sans facteur carré, on observe à l'aide du lemme 2.3 que $N(\mathfrak{j}) \asymp d$. Par suite, on déduit du lemme 3.5 que

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\ll \sum_{N(\mathfrak{i}) \ll D} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})^{c(B)} \left| \# \mathcal{A}_{\mathfrak{j}} - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \right| \\ &\ll \left(x^{15/8} + x^{7/4} D^{1/8}\right) (\log x)^{c(B)}. \end{aligned}$$

□

3.3. Niveau de distribution de \mathcal{B} . Par analogie à $\mathcal{A}_{\mathfrak{i}}$, on considère dans ce paragraphe le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{i}} := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{B} : \mathfrak{i} | \mathfrak{j}\}.$$

L'étude de la distribution des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ se base sur l'ordre moyen suivant, dû à Landau.

Théorème 3.7 ([Lan18]). *On a, uniformément pour $x \geq 1$,*

$$\#\{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}) \leq x\} = \lambda_{\mathbf{K}} x + O\left(x^{2/3}\right).$$

On définit

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{i}, d} := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{i}} : d | N(\mathfrak{j} \mathfrak{i}^{-1})\}.$$

L'estimation de Type I relative à $\mathcal{B}_{\mathfrak{i}, d}$ contenue dans le lemme ci-dessous est une généralisation du lemme 3.6 de [HBM02].

Lemme 3.8. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $D \geq 1$ et \mathfrak{i} un idéal de $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, on ait*

$$\sum_{D < d \leq 2D} \tau(d)^B \mu(d)^2 \left| \# \mathcal{B}_{\mathfrak{i}, d} - \lambda_{\mathbf{K}} \frac{c(N_1, N_2) \eta q^3 x^3}{N(\mathfrak{i})} \beta(d) \right| \ll \frac{x^2 D^{1/3}}{N(\mathfrak{i})^{2/3}} (\log 2D)^{c(B)}$$

où β est la fonction multiplicative à support sur les entiers sans facteur carré définie par

$$(3.45) \quad \beta(p) = \left(1 - \prod_{\mathfrak{p} | p} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)\right).$$

Démonstration. Au vu de la formule (3.39), on a la formule

$$\# \mathcal{B}_{\mathfrak{i}, d} = \mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j} | d \\ d | N(\mathfrak{j})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \# \left\{ \mathfrak{b} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{j})} < N(\mathfrak{b}) \leq (1 + \eta) \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{j})} \right\}$$

Au vu du théorème 3.7, le résultat se déduit de la suite d'estimations

$$\begin{aligned} \sum_{D < d \leq 2D} \tau(d)^B \mu(d)^2 \sum_{\substack{j|d \\ d|N(j)}} \frac{q^2 x^2}{N(\mathbf{j})^{2/3}} &\ll \frac{q^2 x^2}{N(\mathbf{i})^{2/3}} \sum_{D < d \leq 2D} \frac{\tau(d)^{c(B)}}{d^{2/3}} \\ &\ll \frac{x^2 D^{1/3}}{N(\mathbf{i})^{2/3}} (\log 2D)^{c(B)}. \end{aligned}$$

□

4. LA FONCTION DE DENSITÉ σ_q

4.1. Définition et premières propriétés. Étant donné un sous-ensemble C de \mathbf{N} et un idéal \mathbf{i} , on considère le cardinal

$$(4.1) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C) := \# \{ \mathbf{q} : \mathbf{i}\mathbf{q} \in \mathcal{A} \text{ et } N(\mathbf{q}) \in C \}.$$

En général, on ne peut espérer évaluer $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C)$ en utilisant uniquement les majorations de sommes de Type I obtenues dans la partie précédente. La seule connaissance de ces estimations est par exemple insuffisante pour approcher $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C)$ lorsque les éléments de l'ensemble C ont un nombre fixe de facteurs premiers : c'est là l'incidence du phénomène de parité, mentionné en introduction.

À la suite de Heath-Brown et Moroz, on introduit le cardinal

$$(4.2) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C) := \# \{ \mathbf{q} : \mathbf{i}\mathbf{q} \in \mathcal{B} \text{ et } N(\mathbf{q}) \in C \}$$

et l'on cherche à montrer l'existence d'une constante $\sigma_q(F) > 0$ et d'une fonction $\sigma_q : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{R}$ telles que l'approximation

$$(4.3) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C) \sim \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3 x} \sigma_q(\mathbf{i}) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C)$$

soit vraie, en moyenne sur les idéaux \mathbf{i} et pour une certaine classe d'ensembles d'entiers C inclus dans l'ensemble criblé

$$(4.4) \quad C^-(x^\tau) := \{ d : P^-(d) > x^\tau \}$$

où $\tau = o(1)$ est un paramètre qui sera précisé ultérieurement.

Dans ce paragraphe, on obtient des valeurs heuristiques pour $\sigma_q(F)$ et $\sigma_q(\mathbf{i})$ en étudiant $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau))$ et $S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau))$. Au vu des estimations de sommes de Type I contenues dans les lemmes 3.6 et 3.8, l'application d'un lemme fondamental de crible - démarche qui sera effectuée en détail au paragraphe 6 - suggère que l'on a

$$(4.5) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau)) \sim \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} (1 - \gamma_q(\mathbf{i}, p))$$

et

$$(4.6) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau)) \sim \lambda_{\mathbf{K}} c(N_1, N_2) \frac{\eta q^3 x^3}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} (1 - \beta(p)).$$

L'étude de la singularité de $\zeta_K(s)$ en $s = 1$ permet d'obtenir l'analogie suivant de la formule (6.8) de [HB01], uniforme en $y \geq 2$,

$$(4.7) \quad \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \lambda_{\mathbf{K}}^{-1} (1 + O((\log y)^{-2})).$$

Comme observé dans le lemme 3.4 de [HBM02], le théorème des idéaux premiers implique de même que, uniformément en $y > P(q)$, on a

$$(4.8) \quad \prod_{p \geq y} (1 - \gamma_q(p)) \left(1 + \frac{1}{p}\right) = (1 + O((\log y)^{-2})),$$

où γ_q est défini par (3.41), d'où l'on déduit la convergence du produit eulérien

$$(4.9) \quad \sigma_q(F) := \left(\prod_{\gamma_q(p) \neq 1} (1 - \gamma_q(p)) \left(1 + \frac{1}{p}\right) \prod_{\gamma_q(p)=1} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

Ce produit eulérien, strictement positif d'après le lemme 3.4 de [HBM02], satisfait, au vu de (3.44), l'estimation uniforme en $q \geq 1$,

$$(4.10) \quad \sigma_q(F), \sigma_q(F)^{-1} \ll \frac{q}{\varphi(q)} \ll \log_2(3q).$$

On observe que la formule (3.43) implique les estimations suivantes, uniformes en $N(\mathbf{j}) \ll q^3 x^3$ et $x^\tau > q$,

$$(4.11) \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p|N(\mathbf{i})}} (1 - \gamma_q(\mathbf{j}, p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p|N(\mathbf{i})}} (1 - \gamma_q(p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right).$$

Sous réserve d'établir les formules (4.5) et (4.6), il s'ensuit la formule uniforme en $N(\mathbf{i}) \ll q^3 x^3$

$$(4.12) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau)) \sim \eta^2 x^2 \sigma_q(F) \frac{\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

avec

$$(4.13) \quad \sigma_q(\mathbf{i}) := \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}) \prod_{\gamma_q(p)=1} (1 - \gamma_q(\mathbf{i}, p)) \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}) := \alpha_q(\mathbf{i}) \prod_{\substack{p|N(\mathbf{i}) \\ \gamma_q(p) \neq 1}} (1 - \gamma_q(\mathbf{i}, p)) (1 - \gamma_q(p))^{-1}.$$

On a en particulier, pour p un premier q -régulier et $k \geq 1$, la formule

$$(4.14) \quad \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(p^k) = \nu_p \left(\frac{p-1}{p+1} \right) \left(1 - \frac{\nu_p}{1+p} \right)^{-1} = \nu_p + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

De plus, on peut déduire de l'estimation (3.25) la majoration uniforme en p premier

$$(4.15) \quad \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}_p) \ll \alpha_q(\mathbf{i}_p) \ll N(\mathbf{i}_p)^{1/3} \min\left(p^{2v_p(q)} N(\mathbf{i}_p)^{2/3}\right).$$

Au vu de la formule asymptotique (4.7), on a également

$$(4.16) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau)) \sim c(N_1, N_2) \frac{\eta q^3 x^3}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

ce qui justifie la pertinence de (4.3) lorsque $C = C^-(x^\tau)$.

4.2. Ordre moyen de σ_q . On étudie dans ce paragraphe l'ordre moyen $S(\mathcal{B}; \sigma_q h)$ défini par (2.15) pour $h \in \mathcal{M}(z)$, c'est-à-dire h multiplicative, à valeur dans le disque unité et satisfaisant $h(p) = z$ pour tout premier p . Comme souligné dans l'introduction, la preuve du théorème 1.1 repose sur une estimation asymptotique de $S(\mathcal{B}; \sigma_q h)$. De plus, les majorations de $S(\mathcal{B}; \sigma_q)$ que nous développons ici seront utilisées à de nombreuses reprises dans les parties 6 et 7.

Compte tenu de la formule (4.14) relative à la valeur de $\tilde{\sigma}_q$ aux entiers q -réguliers, on observe que, uniformément pour p premier q -régulier et $0 \leq \Re(s) \leq 1$, on a

$$(4.17) \quad \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(p)}{p^s} = \sum_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\Re(s)}}\right).$$

Il suit de (4.14) que la série $\mathcal{H}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-z}$ où

$$(4.18) \quad \mathcal{H}(s) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n)h(n)}{n^s}$$

est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\Re(s) > 1/2$.

De plus, la relation (4.17) entraîne que, uniformément en $q \geq 1$ et $\Re(s) > 1/2$,

$$(4.19) \quad \mathcal{H}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-z} \ll_{\Re(s)} \prod_{p|q} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{\Re(s)}}\right)\right) \ll_{\Re(s)} 2^{\omega(q)}$$

et

$$\mathcal{H}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-z}|_{s=1} \ll \prod_{p|q} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right) \ll \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^c \ll (\log_2(q+2))^c$$

La méthode de Selberg-Delange permet d'établir le résultat central de ce paragraphe, à savoir la formule asymptotique de $S(\mathcal{B}; \sigma_q h)$ contenue dans la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soient z un nombre complexe tel que $|z| \leq 1$ et $h \in \mathcal{M}(z)$. Il existe $C > 0$ tel que l'on ait, uniformément en $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,*

$$(4.20) \quad S(\mathcal{B}; \sigma_q h) = c(N_1, N_2) \eta q^3 x^3 \log(c(N_1, N_2) q^3 x^3)^{z-1} \left(\frac{\sigma_q(F, h)}{\Gamma(z)} + O\left(\frac{C^{\omega(q)} (\log(q+1))^4}{\log x}\right) \right)$$

où

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \sigma_q(F, h) &:= \prod_{\substack{p \\ \gamma_q(p) \neq 1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 + (1 - \gamma_q(p))^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^k} \sum_{N(\mathfrak{i})=p^k} \alpha_q(\mathfrak{i}) (1 - \gamma_q(\mathfrak{i}, p))\right)\right) \\ &\times \prod_{\substack{p \\ \gamma_q(p) = 1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(\sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^k} \sum_{N(\mathfrak{i})=p^k} \alpha_q(\mathfrak{i}) (1 - \gamma_q(\mathfrak{i}, p))\right) \end{aligned}$$

et $\alpha_q(\cdot)$ et $\gamma_q(\cdot, \cdot)$ sont définis respectivement par (3.23) et (3.41).

On a en particulier $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1} \zeta_q(2)^{-1}$ et, uniformément en $x \geq 3$ et $q \leq (\log x)^A$,

$$(4.22) \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \leq x} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} = \frac{1}{\zeta_q(2) \sigma_q(F)} \log x + O\left(C^{\omega(q)} (\log_2 x)^4\right).$$

Démonstration. On étudie dans un premier temps $\sigma_q h$ sur les entiers q -réguliers. Au vu de ce qui précède, on peut adapter *mutatis mutandis* la preuve du théorème II.5.2 de [Ten08] en remplaçant la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ par la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$, pour en déduire que l'on a, pour tout entier $N \geq 0$ et uniformément en $x \geq 2$ et $q \geq 1$,

$$(4.23) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n) h(n) = x(\log x)^{z-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k(h)}{\Gamma(z-k)(\log x)^k} + O\left(\frac{2^{\omega(q)}}{(\log x)^{N+1}}\right) \right)$$

où les $\lambda_k(h)$ sont définis à l'aide du développement de Taylor en $s = 1$

$$(4.24) \quad \frac{(s-1)^z \mathcal{H}(s)}{s} := \sum_{k \geq 0} \lambda_k(h) (s-1)^k.$$

En particulier, on a

$$(4.25) \quad \lambda_0(h) = \lambda_{\mathbf{K}}^z \mathcal{H}(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-z} \Big|_{s=1}$$

tandis que l'estimation (4.19) et l'inégalité de Cauchy entraînent les majorations

$$(4.26) \quad |\lambda_k(h)| \ll \sup_{|s-1| \leq \frac{1}{4}} \{ |\mathcal{H}(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-z}| \} \ll 2^{\omega(q)}.$$

En choisissant $h(n) = 1$ pour tout entier $n \geq 1$, une sommation par parties entraîne directement la formule uniforme en $q \geq 1$ et $x \geq 3$ suivante

$$(4.27) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} = \lambda_0(\mathbf{1})(\log x) + O\left(2^{\omega(q)} \log_2 x\right)$$

avec

$$\lambda_0(\mathbf{1}) = \prod_{p \text{ } q\text{-régulier}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \left(\frac{p+1}{\nu_p} - 1\right)^{-1}\right)$$

Attardons-nous à présent sur la contribution des entiers q -singuliers. On peut montrer que pour tout $\sigma > 1/3$, il existe $C(\sigma) > 0$ tel que

$$(4.28) \quad \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \log d}{d^\sigma} \leq q^{3(1-\sigma)} (\log(q+1))^4 C(\sigma)^{\omega(q)+1}.$$

En effet, d'une part, on peut écrire à l'aide de (2.3) et (3.25) les estimations suivantes, valides pour p fixé et $1/3 < \sigma < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})^\sigma} &\ll \sum_{k \leq 3v_p(q)} \tau(p^k)^2 p^{k(1-\sigma)} + p^{2v_p(q)} \sum_{k > 3v_p(q)} \tau(p^k)^2 p^{k(1/3-\sigma)} \\ &\ll_\sigma (\log(q+1))^3 p^{3v_p(q)(1-\sigma)}. \end{aligned}$$

En outre, on observe que (3.24) entraîne l'estimation uniforme pour \mathfrak{p} un idéal premier 1-régulier et $1/3 < \sigma < 1$,

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_q(\mathfrak{p}^k)(1 - \gamma_q(\mathfrak{p}^k, p))}{p^{k\sigma}} \ll p^{v_p(q)(1-\sigma)}.$$

On en déduit alors en utilisant la définition (4.13) de σ_q que, pour $1/3 < \sigma < 1$, on a

$$\sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d^\sigma} \ll_\sigma C(\sigma)^{\omega(q)} \prod_{p \text{ } q\text{-singulier}} \left(\sum_{k \geq 0} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})(1 - \gamma_q(\mathbf{i}, p))}{N(\mathbf{i})^\sigma} \right) \\ \ll_\sigma q^{3(1-\sigma)} (\log(q+1))^3 C(\sigma)^{\omega(q)}.$$

Dans la mesure où le membre de gauche de (4.28) est la dérivée de la série $\sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d^s}$ en σ , on obtient l'estimation (4.28) en appliquant l'inégalité de Cauchy dans le cercle de centre σ et de rayon $\frac{c(\sigma)}{\log q}$ avec $c(\sigma) > 0$ suffisamment petit. Ceci permet de déduire la convergence absolue de $\sigma_q(F, h)$ ainsi que l'estimation suivante, conséquence de la méthode de Rankin ,

$$\sum_{\substack{d > y \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \leq y^{\sigma-1} \sum_{\substack{d > y \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d^\sigma} \\ (4.29) \quad \ll_\sigma y^{\sigma-1} q^{3(1-\sigma)} (\log(q+1))^3 C(\sigma)^{\omega(q)}$$

où $1/3 < \sigma < 1$.

En utilisant (4.27) et (4.29), il s'ensuit alors que, uniformément en $q \leq (\log x)^4$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} = \sum_{\substack{d \leq x^{1/2} \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \sum_{\substack{n \leq x/d \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} + O \left(\sum_{\substack{d > x^{1/2} \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} \right) \\ = \sum_{\substack{d \leq x^{1/2} \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \lambda_0(\mathbf{1}) \log \left(\frac{x}{d} \right) + O \left(C^{\omega(q)} (\log_2 x)^4 \right) \\ = \sigma_q(F, \mathbf{1}) \log x + O \left(C^{\omega(q)} (\log_2 x)^4 \right),$$

en remarquant que

$$\sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \lambda_0(\mathbf{1}) = \sigma_q(F, \mathbf{1}).$$

Pour montrer que $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1} \zeta_q(2)^{-1}$ et ainsi établir (4.22), on commence par remarquer que, pour tout premier p , la définition (3.41) entraîne la formule

$$\sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (1 - \gamma_q(\mathbf{i}, p)) = \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \left(\frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + \sum_{\substack{J|p \\ p|N(\mathbf{i})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \right) \\ (4.30) \quad = \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \left(1 + \sum_{\substack{J|(\mathbf{i}, p) \\ p|N(\mathbf{j}) \\ I \neq J}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \right).$$

En injectant la formule d'inclusion-exclusion (3.39) dans (4.30), on obtient ainsi l'égalité

$$(4.31) \quad \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (1 - \gamma_q(\mathbf{i}, p)) = - \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}) \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} = \gamma_q(p).$$

Compte tenu des définitions (4.21) et (4.9), il s'ensuit que $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1} \zeta_q(2)^{-1}$.

On conclut la preuve de la proposition en montrant la formule (4.20). Compte tenu des définitions (2.15) et (4.13), on peut écrire

$$(4.32) \quad S(\mathcal{B}; \sigma_q h) = \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) h(d) \sum_{\substack{n \text{ } q\text{-régulier} \\ c(N_1, N_2) q^3 x^3 < dn \leq c(N_1, N_2) q^3 x^3 (1+\eta)}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n) h(n).$$

Pour estimer la contribution des entiers $d \leq x$, on utilise (4.23) sous la forme

$$\sum_{\substack{n \text{ } q\text{-régulier} \\ x < n \leq x(1+(\log x)^{-B})}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n) h(n) = \frac{x(\log x)^{z-1}}{(\log x)^B} \left(\frac{\lambda_0(h)}{\Gamma(z)} + O\left(\frac{2^{\omega(q)}}{\log x}\right) \right)$$

valide dès que $B \geq 1$. En majorant trivialement la contribution des entiers q -singuliers $d > x$, on vérifie que l'on a, uniformément en $x \geq 2$, $q \leq (\log x)^A$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,

$$S(\mathcal{B}; \sigma_q h) = c(N_1, N_2) q^3 \eta x^3 (\log(c(N_1, N_2) q^3 x^3))^{z-1} \frac{\lambda_0(h)}{\Gamma(z)} \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} + R_1 + R_2 + R_3$$

où

$$|R_1| \ll c(N_1, N_2) q^3 \eta x^3 (\log(c(N_1, N_2) q^3 x^3))^{\Re(z)-1} \frac{C^{\omega(q)}}{\log x} \sum_{\substack{d \leq x \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \log d}{d},$$

$$|R_2| \ll c(N_1, N_2) q^3 \eta x^3 (\log(c(N_1, N_2) q^3 x^3))^{\Re(z)-1} C^{\omega(q)} \sum_{\substack{d > x \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d},$$

et

$$|R_3| \leq \sum_{\substack{n \leq c(N_1, N_2) q^3 x^3 (1+\eta) \\ n_{q-s} > x}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n).$$

En utilisant les estimations (4.28) et (4.29), on obtient

$$|R_1|, |R_2| \ll c(N_1, N_2) q^3 \eta x^3 (\log(c(N_1, N_2) q^3 x^3))^{\Re(z)-1} \frac{(\log(q+1))^4 C^{\omega(q)}}{\log x}.$$

On remarque d'autre part en utilisant la méthode de Rankin et les estimations (4.22), (2.3) et (4.15) que, si ω_{1-s} désigne le nombre de premiers 1-singuliers, alors

$$\begin{aligned} |R_3| &\ll \sum_{n \ll q^3 x^3} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) \sum_{\substack{p \text{ } q\text{-singulier} \\ x^{1/(\omega(q)+\omega_{1-s})} < p^k \ll q^3 x^3 / n}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(p^k) \\ &\ll q^3 x^3 \sum_{n \ll q^3 x^3} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} \sum_{\substack{p \text{ } q\text{-singulier} \\ x^{1/(\omega(q)+\omega_{1-s})} < p^k}} \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \\ &\ll (\log x)^c x^{3-2/3(\omega(q)+\omega_{1-s})}, \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire (4.20) dans la mesure où $\omega(q) \ll \log_2(3x)$. \square

5. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE

Dans toute la suite de l'article, on fixe $\varpi_0 \in]0, 1[$ et on introduit le paramètre $\tau := (\log_2 x)^{-\varpi_0}$. Dans la série d'articles [HB01, HBM02, HBM04], Heath-Brown et Moroz réalisent le tour de force de montrer la validité de la formule (avec les notations (4.1) et (4.2))

$$(5.1) \quad S(\mathcal{A}, \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, C) \sim \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, C),$$

pour certains ensembles C inclus dans

$$(5.2) \quad C(m, n) := \left\{ rs : \Omega(r) = \omega(r) = m \text{ et } \Omega(s) = \omega(s) = n, P^-(rs) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s \leq x^{\frac{3}{2}-\tau} \right\}.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on considère $\mathcal{E}(k)$ l'ensemble des parties de \mathbf{N} qui s'écrivent

$$(5.3) \quad E(k) = \bigcap_{i=1}^{D_k} E_i(k)$$

où $1 \leq D_k \leq \tau^{-1}$ et les $E_j(k)$ sont des ensembles de la forme

$$(5.4) \quad E_i(k) = E_i(k; y, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \prec) := \left\{ m : \Omega(m) = \omega(m) = k, yP^{(\vec{\alpha})}(m) \prec P^{(\vec{\beta})}(m) \right\}$$

où $y > 0$, \prec désigne $<$ ou \leq , $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$ avec $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_j$, $\vec{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_l)$ avec $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_l$,

$$P^{(\vec{\alpha})}(m) := P^{(\alpha_1)}(m) \dots P^{(\alpha_j)}(m) \quad \text{et} \quad P^{(\vec{\beta})}(m) := P^{(\beta_1)}(m) \dots P^{(\beta_l)}(m),$$

les $P^{(i)}(m)$ étant définis par la décomposition de m en facteurs premiers

$$m = P^{(1)}(m) \dots P^{(\Omega(m))}(m) \quad \text{avec} \quad P^{(i)}(m) \leq P^{(i+1)}(m)$$

avec la convention $P^{(\vec{\alpha})}(m) = 1$ (resp. $P^{(\vec{\beta})}(m) = 1$) si $j = 0$ (resp. $l = 0$). En adaptant les arguments de Heath-Brown et Moroz, on montrera au paragraphe 7 que la formule (5.1) se généralise sous la forme

$$(5.5) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, E \cap C(m, n)) \sim \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathbf{i}) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E \cap C(m, n))$$

pour les ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)^2$.

En vue d'exploiter la relation (5.5), on introduit l'ensemble \mathcal{F} des fonctions h pour lesquelles on peut écrire, pour tout entier m satisfaisant $\Omega(m^+(x^\tau)) = \omega(m^+(x^\tau)) = k$, la décomposition

$$(5.6) \quad h(m) = h_1(m^-(x^\tau)) h_2(k) 1_{E(k)}(m^+(x^\tau))$$

où $E(k) \in \mathcal{E}(k)$ et $h_1, h_2 : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$. Il convient de noter que les fonctions définies dans l'introduction par (1.8) sont des éléments de \mathcal{F} .

En isolant les idéaux de \mathcal{A} tels que $\mathbf{j}^+(x^\tau)$ possède au moins un facteur carré, la décomposition (5.6) permet de réécrire l'ordre moyen $S(\mathcal{A}; h)$ défini par (2.13) sous la forme

$$(5.7) \quad S(\mathcal{A}; h) = \sum_{P^+(N(\mathbf{i})) \leq x^\tau} h_1(\mathbf{i}) \sum_{k \geq 0} h_2(k) S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, E(k) \cap C^-(x^\tau)) + O \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(\mathbf{j})| \right)$$

2. Dans la mesure où toute réunion peut s'écrire comme intersection d'ensembles, on peut en fait considérer des ensembles de la forme plus générale $E(k) = \bigcup_i \bigcap_j E_{ij}(k)$

où

$$(5.8) \quad \Upsilon(z) := \bigcup_p \bigcup_{\substack{k \geq 2 \\ p^k > z}} p^k \mathbf{Z}.$$

Sous réserve de la validité de (4.3) et en remarquant que (4.11) implique l'estimation

$$(5.9) \quad \sigma_q(\mathbf{j}) = \sigma_q(\mathbf{j}^-(x^\tau)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \right),$$

on peut espérer approcher $S(\mathcal{A}; h)$ par

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3x} \sum_{P^+(N(\mathbf{i})) \leq x^\tau} h_1(\mathbf{i}) \sigma_q(\mathbf{i}) \sum_{k \geq 0} h_2(k) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E(k) \cap C^-(x^\tau)) \\ &= \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3x} \left(S(\mathcal{B}; \sigma_q h) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \right) + O\left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} \sigma_q(\mathbf{j}) |h(\mathbf{j})| \right) \right) \end{aligned}$$

où $S(\mathcal{B}; \sigma_q h)$ est défini par (2.15).

Sous couvert d'une certaine régularité pour h – par exemple si la série de Dirichlet $\mathcal{H}(s)$ définie par (4.18) possède un prolongement analytique à gauche de la droite $\Re(s) = 1 -$, on pourra estimer $S(\mathcal{B}; \sigma_q h)$ en utilisant des méthodes d'analyse asymptotique (voir les propositions 4.1 et 8.1).

Dans la suite de ce paragraphe, on établit un raisonnement combinatoire qui conduira au théorème 5.2. Celui-ci ramène le problème de l'estimation de $S(\mathcal{A}; h)$ (resp. $S(\mathcal{B}, \sigma_q h)$) à l'estimation des cardinaux $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, E \cap C(m, n))$ (resp. $S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E \cap C(m, n))$).

Soit $\varpi_1 \in]0, \varpi_0[$. On introduit un paramètre $\tau_1 \geq (\log_2 x)^{-\varpi_1}$ suffisamment petit qui sera rendu explicite dans les applications du paragraphe 8, en vue de contrôler la contribution des idéaux \mathbf{j} satisfaisant $N(\mathbf{j}^+(x^\tau)) \geq x^{\tau_1}$.

Étant donné un idéal admissible \mathbf{j} de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, on considère la décomposition de sa partie x^τ -criblée en produits d'idéaux premiers

$$(5.10) \quad \mathbf{j}^+(x^\tau) = \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_k \text{ avec } N(\mathbf{p}_i) \leq N(\mathbf{p}_{i+1}).$$

On effectue une partition de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ sous la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$ où les $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}$ sont les ensembles d'idéaux définis par des conditions sur la norme de \mathbf{p}_k et \mathbf{p}_{k-1} , à savoir

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} := \{\mathbf{j} : x^2 < N(\mathbf{p}_k)\}, \quad \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} := \{\mathbf{j} : x^{3/2} < N(\mathbf{p}_k) \leq x^2\},$$

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} := \{\mathbf{j} : x < N(\mathbf{p}_k) \leq x^{3/2}\}, \quad \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} := \{\mathbf{j} : N(\mathbf{p}_k) \leq x \text{ et } x^{3/2} < N(\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{p}_k)\}$$

$$\text{et } \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} := \{\mathbf{j} : N(\mathbf{p}_k) \leq x \text{ et } N(\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{p}_k) \leq x^{3/2}\}.$$

Il s'ensuit que

$$S(\mathcal{A}; h) = \sum_{i=1}^5 S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}; h) \quad \text{avec} \quad S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}; h) := \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}} h(\mathbf{j}).$$

Pour $i \in \{2, \dots, 5\}$, on peut remplacer le terme $S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}; h)$ par une formule où interviennent des cardinaux de la forme $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, n))$ où $C^{(i)}(m, n) \subset C(m, n)$.

Lemme 5.1. *Uniformément en $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on a*

$$(5.11) \quad S(\mathcal{A}; h) = S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}; h) + \sum_{i=2}^5 \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} h_1(\mathbf{i}) \sum_{m,n} h_2(m+n) S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(m, n)) \\ + O \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(\mathbf{j})| + \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(\mathbf{j})| + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|) \right)$$

où

$$(5.12) \quad \mathcal{I} := \{m \leq x^{\tau_1} \text{ et } P^+(m) \leq x^\tau\},$$

$$(5.13) \quad C^{(2)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in C(m, n) : rs \in E(m+n) \text{ et } P^+(s) \leq P^-(r)\} & \text{si } m = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(5.14) \quad C^{(3)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in C(m, n) : rs \in E(m+n), P^+(r) \leq P^-(s)\} & \text{si } n = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(5.15) \quad C^{(4)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in C(m, n) : rs \in E(m+n), P^+(s) \leq P^-(r), P^+(r) \leq x^{1-\tau_1}\} & \text{si } m = 2, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(5.16) \quad C^{(5)}(m, n) := \left\{ rs \in C(m, n) : rs \in E(m+n), P^+(r) \leq P^-(s), P^+(s) \leq x^{1-\tau_1}, \right. \\ \left. \frac{s}{P^-(s)} < x^{1+\tau} \right\}$$

$$\Delta_1(\mathcal{A}; |h|) := \max_{y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2-\tau_1} \leq N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}_2) \\ y \leq N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \leq yx^{\tau_1}}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{A}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}} |h(\mathbf{j})|$$

et

$$\Delta_2(\mathcal{A}; |h|) := \max_{y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{y \leq N(\mathbf{p}) \leq yx^{\tau_1}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{A}_{\mathbf{p}}} |h(\mathbf{j})|.$$

Démonstration. À l'image de (5.7), on peut écrire, pour tout $i \in \{2, \dots, 5\}$,

$$S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}; h) = \sum_{P^+(N(\mathbf{i})) \leq x^\tau} h_1(\mathbf{i}) \sum_{k \geq 0} h_2(k) S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}, \mathbf{i}, E(k)) + O \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(\mathbf{j})| \right).$$

Soit \mathbf{j} un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}$. En utilisant la décomposition (5.10) et sous l'hypothèse supplémentaire que $N(\mathbf{j}^-(x^\tau)) \leq x^{\tau_1}$, l'encadrement

$$x^{3/2} < N(\mathbf{p}_k) \leq x^2$$

entraîne largement que

$$x^{1-2\tau_1} \ll N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{k-1}) \ll x^{3/2+\tau_1}.$$

En posant $r = N(\mathfrak{p}_k)$ et $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1})$, on déduit ainsi des définitions (5.12) et (5.13) que

$$S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}; h) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h_1(\mathfrak{i}) \sum_{n \geq 0} h_2(n+1) S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}, \mathfrak{i}, C^{(2)}(1, n)) \\ + O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{\substack{x^{3/2} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2+\tau_1} \\ \text{ou } x^{2-2\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right).$$

De même, on peut écrire, en posant maintenant $s = N(\mathfrak{p}_k)$, la formule

$$S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}; h) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h_1(\mathfrak{i}) \sum_{m \geq 0} h_2(m+1) S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}, \mathfrak{i}, C^{(3)}(m, 1)) \\ + O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{\substack{X \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{1+\tau} \\ \text{ou } x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right)$$

et, avec $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k - 2)$,

$$S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}; h) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h_1(\mathfrak{i}) \sum_{n \geq 0} h_2(n+2) S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}, \mathfrak{i}, C^{(4)}(2, n)) + O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| \right. \\ + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \\ \left. + \sum_{x^{3/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2+\tau_1}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right).$$

Considérons enfin $j \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$. Si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) > x^{1/2-2\tau}$, on observe les inégalités

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) \leq N(\mathfrak{p}_k) < x^{1/2+3\tau}.$$

D'autre part, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leq x^{1/2-2\tau}$, alors l'hypothèse $N(j^-(x^\tau)) \leq x^{\tau_1}$ implique l'existence d'un indice $j \geq 2$ tel que

$$N(\mathfrak{p}_{k-j+1} \cdots \mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-j} \cdots \mathfrak{p}_k) < x^{3/2-\tau}.$$

Enfin, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \geq x^{1+\tau}$, alors on a trivialement

$$x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{3/2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}; h) &= \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} h_1(\mathbf{i}) \sum_{m, n \geq 0} h_2(n+m) S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}; \mathbf{i}, C^{(5)}(m, n)) \\
&+ O \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(\mathbf{j})| + \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} \\ N(\mathbf{j}^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(\mathbf{j})| \right. \\
&+ \sum_{\substack{x^{1-\tau_1} \leq N(\mathbf{p}_k) \leq x \\ \text{ou } x^{1/2-2\tau} \leq N(\mathbf{p}_k) \leq x^{1/2+3\tau}}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{A}_{\mathbf{p}_k}} |h(\mathbf{j})| \\
&\left. + \sum_{x^{3/2-\tau} \leq N(\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{p}_k) \leq x^{3/2}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{A}_{\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{p}_k}} |h(\mathbf{j})| \right)
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

Le traitement de $S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}; h)$ nécessite davantage de travail pour faire apparaître des parties de $C(m, n)$. Au vu du lemme 2.4, on a

$$N(\mathbf{p}_k) = \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathbf{j}^-(x^\tau)\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{k-1})} \left(1 + O\left(\eta^{1/4}\right) \right)$$

ce qui suggère d'associer à chaque ensemble $E_i(k)$ défini par (5.4) les ensembles $\tilde{E}_i(k, \mathbf{i})$ des entiers m satisfaisant $\Omega(m) = \omega(m) = k-1$ et

$$\begin{cases} \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3y}{N(\mathbf{i})} P^{(\alpha_1)}(m) \cdots P^{(\alpha_{j-1})}(m) \leq mP^{(\vec{\beta})}(m) & \text{si } \alpha_j = k, \\ mP^{(\vec{\alpha})}(m) \leq P^{(\beta_1)}(m) \cdots P^{(\beta_{l-1})}(m) \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3y}{N(\mathbf{i})} & \text{si } \beta_l = k, \\ yP^{(\vec{\alpha})}(m) \leq P^{(\vec{\beta})}(m) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit encore

$$\tilde{E}(k, \mathbf{i}) = \bigcap_{i=1}^{D_k} \tilde{E}_i(k, \mathbf{i}).$$

Dans la mesure où les éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}$ satisfont $N(\mathbf{p}_k) \geq x^2$, on peut écrire, en posant $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{k-1}$,

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}; h) &= \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} h_1(\mathbf{i}) \sum_k h_2(k) \sum_{\substack{N(\mathbf{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{q})) > x^\tau}} 1_{\tilde{E}(k, \mathbf{i})}(\mathbf{q}) \pi(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{q}) \\
&+ O \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(\mathbf{j})| + \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \\ N(\mathbf{j}^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(\mathbf{j})| + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|) + \tau^{-1} \Delta_3(\mathcal{A}; |h|) \right)
\end{aligned}$$

où

$$\pi(\mathcal{A}, \mathbf{i}) := \# \{ \mathbf{p} \text{ premier} : \mathbf{i}\mathbf{p} \in \mathcal{A} \}$$

et

$$\Delta_3(\mathcal{A}; |h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_k \sum_{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < \dots < N(\mathbf{p}_{k-1})} \max_{y \geq x^2} \sum_{\substack{y \leq N(\mathbf{p}_k) \leq y(1+O(\eta^{1/4})) \\ \mathbf{i}\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_k \in \mathcal{A}}} |h(\mathbf{i}\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_k)|.$$

Pour estimer $\pi(\mathcal{A}, \mathbf{i})$, on reproduit le raisonnement combinatoire à l'origine du lemme 4.1 de [HBM02]. En utilisant la notation (4.4), l'identité de Buchstab et le lemme 2.3 assurent que, si

$$\max(\{1\} \cup \{p^3 : p \text{ premier 1-singulier}\}) < z_1 \leq z_2,$$

alors on a

$$(5.17) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(z_1)) - S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(z_2)) = \sum_{z_1 < N(\mathbf{p}) \leq z_2} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}, C^-(N(\mathbf{p}))) \\ + O\left(\sum_{z_1 < N(\mathbf{p}) \leq z_2} \sum_{k \geq 2} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}^k, C^-(N(\mathbf{p})))\right).$$

Ceci permet d'établir par récurrence la formule combinatoire suivante, analogue des formules (4.3) et (4.4) de [HBM02], formule

$$\pi(\mathcal{A}, \mathbf{i}) = S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(x^{3/2+\tau})) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}) + \sum_{n \geq 1} (-1)^n U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}) \\ - S_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}) - S_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}) + O(\#(\mathcal{A}_\mathbf{i} \cap \Upsilon(x^{2\tau})))$$

où

$$S_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}) := \sum_{x^{1-\tau} \leq N(\mathbf{p}) < x^{1+\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}, C^-(N(\mathbf{p}))), \\ S_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}) := \sum_{x^{3/2-\tau} < N(\mathbf{p}) \leq x^{3/2+\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}, C^-(N(\mathbf{p}))), \\ (5.18) \quad T^{(0)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}) := S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau)), \quad U^{(1)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}) := \sum_{x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{p}) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}, C^-(N(\mathbf{p}))),$$

$$T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < \dots < N(\mathbf{p}_n) < x^{1-\tau} \\ N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n) < x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n, C^-(x^\tau)) \quad \text{si } n \geq 1$$

et

$$U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < \dots < N(\mathbf{p}_n) < x^{1-\tau} \\ N(\mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n) < x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n)}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n, C^-(N(\mathbf{p}_1))) \quad \text{si } n \geq 2.$$

Le niveau de crible x^τ impliqué dans la définition de $T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i})$ étant suffisamment petit, on établira au lemme 6.7, en utilisant le crible de Selberg, la formule asymptotique (4.5) en moyenne sur les idéaux \mathbf{i} tels que $N(\mathbf{i}) \leq x^{1-3\tau_1}$.

Si $n \geq 4$, les conditions

$$x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < \dots < N(\mathbf{p}_n) < x^{1-\tau}$$

et

$$N(\mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n) \leq x^{1+\tau} < N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n)$$

entraînent que

$$N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}.$$

Par suite, on peut espérer estimer la contribution de $U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q})$ lorsque $n \geq 4$ ou $n = 1$ avec $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$, en utilisant la formule (5.5) puisque l'on peut écrire, en posant $m_1 = k$,

$$\sum_k h_2(k) \sum_{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1}} 1_{\tilde{E}(k, \mathfrak{i})}(\mathfrak{q}) U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathbf{m}} h_2(m_1) S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, C^{(1)}(\mathbf{m}, n, \mathfrak{i}))$$

où $\mathbf{m} := (m_1, m_2)$,

$$C(\mathbf{m}, n) := \left\{ r_1 r_2 s : \omega(r_i) = \Omega(r_i) = m_i \text{ pour } i = 1, 2, \omega(s) = \Omega(s) = n, \right. \\ \left. P^-(r_1 r_2 s) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s \leq x^{3/2-\tau} \right\},$$

(5.19)

$$C^{(1)}(\mathbf{m}, 1, \mathfrak{i}) := \left\{ r_1 r_2 s \in C((m_1 - 1, m_2), 1) : P^-(r_2) > s, r_1 \leq x^{1-4\tau_1} \text{ et } r_1 \in \tilde{E}(m_1, \mathfrak{i}) \right\}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$(5.20) \quad C^{(1)}(\mathbf{m}, n, \mathfrak{i}) := \left\{ r_1 r_2 s \in C((m_1 - 1, m_2), n) : P^-(r_2) > P^-(s), P^+(s) < x^{1-\tau}, \right. \\ \left. \frac{s}{P^-(s)} < x^{1+\tau}, r_1 \leq x^{1-4\tau_1} \text{ et } r_1 \in \tilde{E}(m_1, \mathfrak{i}) \right\},$$

où les triplets (r_1, r_2, s) sont comptés avec multiplicité, en posant $r_1 = N(\mathfrak{q})$ et $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n)$ avec les notations de la définition de $U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i})$.

Si $n = 2$ ou 3 , l'inégalité

$$N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{3/2-\tau}$$

peut faire défaut. On s'inspire alors des identités (4.5) et (4.6) de [HBM02] en écrivant

$$U^{(2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}) := U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}) + U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i})$$

et

$$U^{(3)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}) := U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}) + S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{i})$$

où

$$U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) < x^{1-\tau} \\ x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, C^-(N(\mathfrak{p}_1))),$$

$$U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) < x^{1-\tau} \\ x^{\frac{3}{2}-\tau} < N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, C^-(N(\mathfrak{p}_1))),$$

$$U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) < N(\mathfrak{p}_3) < x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3, C^-(N(\mathfrak{p}_1)))$$

et

$$S_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) < N(\mathfrak{p}_3) < x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3) < x^{1+\tau} \\ N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3) > x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, C^-(N(\mathfrak{p}_1))).$$

On peut observer que

$$\sum_k h_2(k) \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} 1_{\widetilde{E}(k, \mathbf{i})}(\mathfrak{q}) U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathbf{m}} h_2(m_1) S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(1)}(\mathbf{m}, 2, \mathbf{i}))$$

et

$$\sum_k h_2(k) \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} 1_{\widetilde{E}(k, \mathbf{i})}(\mathfrak{q}) U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathbf{m}} h_2(m_1) S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(1)}(\mathbf{m}, 3, \mathbf{i}))$$

où $C^{(1)}(\mathbf{m}, 2, \mathbf{i})$ et $C^{(1)}(\mathbf{m}, 3, \mathbf{i})$ sont définis par (5.20).

De plus, on remarque que, si un idéal \mathfrak{j} intervient dans $U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{q})$, alors \mathfrak{j} est de la forme $\mathfrak{j} = \mathbf{i}\mathfrak{q}\mathfrak{K}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ avec

$$x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau} \text{ et } P^-(N(\mathfrak{K})) > N(\mathfrak{p}_1).$$

Il s'ensuit que

$$x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{q}\mathfrak{K}) \leq x^{3/2+2\tau}$$

ce qui suggère d'écrire, en posant $r = N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$, $s_1 = N(\mathfrak{q})$, $s_2 = N(\mathfrak{K})$ et $n_1 = k$,

$$\begin{aligned} & \sum_k h_2(k) \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} 1_{\widetilde{E}(k, \mathbf{i})}(\mathfrak{q}) U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathbf{n}} h_2(n_1) S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(1)}(2, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \\ & + O \left(\sum_k |h_2(k)| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} 1_{\widetilde{E}(k, \mathbf{i})}(\mathfrak{q}) \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) \\ x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{3/2+\tau_1} \\ \text{ou } x^{2-2\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(N(\mathfrak{p}_1))) \right) \end{aligned}$$

où

$$C(m, \mathbf{n}) := \left\{ rs_1s_2 : \omega(r) = \Omega(r) = m, \omega(s_i) = \Omega(s_i) = n_i \text{ pour } i = 1, 2, \right. \\ \left. P^-(rs_1s_2) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s_1s_2 \leq x^{3/2-\tau} \right\}.$$

et

(5.21)

$$C^{(1)}(2, \mathbf{n}, \mathbf{i}) := \left\{ rs_1s_2 \in C(2, (n_1 - 1, n_2)), s_1 \in \widetilde{E}(n_1, \mathbf{i}), P^+(r) < x^{1-\tau}, P^-(r) < P^-(s_2) \right\}$$

où les triplets (r, s_1, s_2) .

On observe que l'on peut majorer la somme sur i du terme d'erreur précédent par

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1(\mathcal{A}; |h|) &:= \max_{y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \\ y \leq N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) \leq yx^{\tau_1}}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h_1(i)| \sum_k |h_2(k)| \\ &\quad \times \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} 1_{\tilde{E}(k,i)}(\mathfrak{q}) S(\mathcal{A}, i\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(N(\mathfrak{p}_1))). \end{aligned}$$

De même, en remarquant que les conditions de sommations définissant $S_3(\mathcal{A}, i)$ impliquent

$$x^{1/2-2\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq x^{1/2+\tau/2},$$

on a, pour $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\sum_{N(i) \in \mathcal{I}} h_1(i) \sum_k h_2(k) \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} 1_{\tilde{E}(k,i)}(\mathfrak{q}) S_i(\mathcal{A}, i\mathfrak{q}) \ll \tilde{\Delta}_2(\mathcal{A}; |h|).$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_2(\mathcal{A}; |h|) &:= \max_{y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{y \leq N(\mathfrak{p}) \leq yx^{\tau_1}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h_1(i)| \sigma_q(i) \sum_k |h_2(k)| \\ &\quad \times \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} 1_{\tilde{E}(k,i)}(\mathfrak{q}) S(\mathcal{A}, i\mathfrak{q}\mathfrak{p}, C^-(N(\mathfrak{p}))). \end{aligned}$$

On déduit finalement de ce qui précède la formule

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}; h) &= \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} h_1(i) \left(\sum_k h_2(k) \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} 1_{\tilde{E}(k,i)}(\mathfrak{q}) \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, i\mathfrak{q}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sum_{\mathbf{m}} h_2(m_1) S(\mathcal{A}, i, C^{(1)}(\mathbf{m}, n, i)) + \sum_{\mathbf{n}} h_2(n_1) S(\mathcal{A}, i, C^{(1)}(2, \mathbf{n}, i)) \right) \\ &\quad + O \left(\Delta_2(\mathcal{A}; |h|) + \tau^{-1} \Delta_3(\mathcal{A}; |h|) + \tilde{\Delta}_1(\mathcal{A}; |h|) + \tilde{\Delta}_2(\mathcal{A}; |h|) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in \mathcal{A} \cap \Upsilon(x^{2\tau})} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| \right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

L'argument développé ci-dessus s'adapte pour réécrire $S(\mathcal{B}; \sigma_q h)$ à l'aide de cardinaux de la forme $S(\mathcal{B}, i, E \cap C(m, n))$. En l'absence d'un analogue du lemme 2.3 adapté aux idéaux de \mathcal{B} , il convient toutefois d'user de précaution en considérant également la contribution des idéaux non admissibles dans l'utilisation de (5.17) au cours du traitement de $S(\mathcal{B} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}; \sigma_q h)$. Cette nouveauté dans la transcription à \mathcal{B} de l'argument combinatoire précédent était déjà implicitement contenue dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à l'image de la formule (6.4) de [HB01] ou

encore lors de l'introduction de l'ordre total sur les idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ dans le paragraphe 4 de [HBM02].

Avant d'énoncer la proposition qui résume la discussion de cette partie, on harmonise les notations précédentes en introduisant, pour $\mathbf{m} := (m_1, m_2)$, $\mathbf{n} := (n_1, n_2)$ et \mathbf{i} un idéal,

$$(5.23) \quad C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) := \begin{cases} \{(r, 1, s, 1) : rs \in C^{(i)}(m_1, n_1)\} & \text{si } 2 \leq i \leq 5 \text{ et } m_2 = n_2 = 0, \\ \{(r_1, r_2, s, 1) : r_1 r_2 s \in C^{(1)}((m_1, m_2), n_1, \mathbf{i})\} & \text{si } i = 1 \text{ et } n_2 = 0, \\ \{(r, 1, s_1, s_2) : r s_1 s_2 \in C^{(1)}((m_1, (n_1, n_2), \mathbf{i})\} & \text{si } i = 1 \text{ et } m_2 = 0, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) := \# \left\{ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) : (N(\mathbf{r}_1), N(\mathbf{r}_2), N(\mathbf{s}_1), N(\mathbf{s}_2)) \in C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) \right. \\ \left. \text{et } \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \in \mathcal{D} \right\}$$

et

$$h_2(\mathbf{m}, \mathbf{n}) := \begin{cases} h_2(m+n) & \text{si } i \in \{2, 3, 4, 5\}, \\ h_2(m_1) & \text{si } i = 1 \text{ et } n_2 = 0, \\ h_2(n_1) & \text{si } i = 1 \text{ et } m_2 = 0. \end{cases}$$

Théorème 5.2. *On a, uniformément en $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,*

$$S(\mathcal{A}; h) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} S(\mathcal{B}; \sigma_q h) \ll T(|h|) + S(|h|) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(x^{2\tau/3}) \\ + \Delta_1(|h|) + \Delta_2(|h|) + \tau^{-1} \Delta_3(|h|) + \tilde{\Delta}_1(|h|) + \tilde{\Delta}_2(|h|)$$

où

$$T(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{q})) > x^\tau}} \sum_{n \geq 0} \left| T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{q}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathbf{i}) T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathbf{i} \mathbf{q}) \right|,$$

$T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i})$ et $T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathbf{i})$ étant définis par (5.18),

$$(5.24) \quad S(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{i=1}^5 \sum_{m, n} |h_2(\mathbf{m}, \mathbf{n})| \left| S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right. \\ \left. - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathbf{i}) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right|,$$

les $C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$ étant définis par (5.23) et (5.13), (5.14), (5.15), (5.19), (5.20) et (5.21),

$$(5.25) \quad \Theta(|h|, y, z) := \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}^-(y)) > z}} |h(\mathbf{j})| + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathbf{j}^-(y)) > z}} \sigma_q(\mathbf{j}) |h(\mathbf{j})|,$$

$$(5.26) \quad \Delta_0(|h|, y) := \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j) \in \Upsilon(y)}} |h(j)| + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j) \in \Upsilon(y)}} \sigma_q(j) |h(j)| + \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h_1(i)| \sigma_q(i) \right. \\ \left. \times \sum_k |h_2(k)| \sum_{\substack{N(q) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(q)) > x^\tau}} 1_{\widetilde{E}(k, i)}(q) \# \{ \mathfrak{K} : i \mathfrak{K} q \in \mathcal{B}, N(\mathfrak{K}) \in \Upsilon(y) \} \right),$$

(5.27)

$$\Delta_1(|h|) := \max_{y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_1), N(\mathfrak{p}_2) \\ y \leq N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) \leq y x^{\tau_1}}} \left(\sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2}} |h(j)| + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sum_{j \in \mathcal{B}_{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2}} |h(j)| \sigma_q(j) \right),$$

$$(5.28) \quad \Delta_2(|h|) := \max_{y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{y \leq N(\mathfrak{p}) \leq y x^{\tau_1}} \left(\sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}} |h(j)| + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sum_{j \in \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}} |h(j)| \sigma_q(j) \right),$$

$$(5.29) \quad \Delta_3(|h|) := \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} \sum_k \sum_{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_{k-1})} \max_{y \geq x^2} \left(\sum_{\substack{y \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq y(\log x)^c \\ i \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k \in \mathcal{A}}} |h(i \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k)| \right. \\ \left. + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(i) \sum_{\substack{y \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq y(\log x)^c \\ i \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k \in \mathcal{B}}} |h(i \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k)| \right),$$

$$(5.30) \quad \widetilde{\Delta}_1(|h|) := \max_{y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \\ y \leq N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) \leq y x^{\tau_1}}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h_1(i)| \sum_k |h_2(k)| \sum_{\substack{N(i) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(q)) > x^\tau}} 1_{\widetilde{E}(k, i)}(q) \\ \times \left(S(\mathcal{A}, i \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, C^-(N(\mathfrak{p}_1))) + \sigma_q(i) \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} S(\mathcal{B}, i \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, C^-(N(\mathfrak{p}_1))) \right)$$

et

$$(5.31) \quad \widetilde{\Delta}_2(|h|) := \max_{y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{y \leq N(\mathfrak{p}) \leq y x^{\tau_1}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h_1(i)| \sum_k |h_2(k)| \sum_{\substack{N(q) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(i_2)) > x^\tau}} 1_{\widetilde{E}(k, i)}(q) \\ \times \left(S(\mathcal{A}, i \mathfrak{p}, C^-(N(\mathfrak{p}))) + \sigma_q(i) \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} S(\mathcal{B}, i \mathfrak{p}, C^-(N(\mathfrak{p}))) \right).$$

On suppose dans toute la suite que h est à valeurs dans le disque unité. Cette condition est réalisée par les fonctions des théorèmes 1.1 et 1.2. Au cours des paragraphes 6 et 7), on établira des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans le théorème 5.2. Il en résultera le corollaire suivant, qui est une version effective du théorème 5.2 avec h borné.

Corollaire 5.3. *Supposons que $|h| \leq 1$. Uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $x \geq 2$, on a*

$$(5.32) \quad S(\mathcal{A}; h) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} S(\mathcal{B}; \sigma_q h) \ll \tau_1 \eta^2 x^2 + \Delta(|h|)$$

où

$$(5.33) \quad \Delta(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{m, n} \sum_{j \leq D_k} \left(\Delta_j(m+n, \mathcal{A}, \mathbf{i}, |h|) + \frac{\sigma_q(F) \eta}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathbf{i}) \Delta_j(m+n, \mathcal{B}, \mathbf{i}, |h|) \right)$$

et, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} , $\Delta_j(k, \mathcal{D}, \mathbf{i}, |h|)$,

$$\begin{aligned} \Delta_j(k, \mathcal{D}, \mathbf{i}, |h|) &:= \# \left\{ \mathbf{ij} \in \mathcal{D} : x^\tau < P^-(N(\mathbf{j})), P^+(N(\mathbf{j})) \leq x^{1-\tau}, \right. \\ &\quad x^{1-\tau_1} \leq P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathbf{j})), P^{(\vec{\beta})}(N(\mathbf{j})) \leq x^{1+\tau_1}, \\ &\quad \left. y P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathbf{j})) \leq P^{(\vec{\beta})}(N(\mathbf{j})) \leq y x^{O(\tau^6)} P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathbf{j})) \right\} \end{aligned}$$

pour les y , $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ introduits dans la définition (5.4) de $E_j(k)$.

De plus, si h est à support sur les entiers z criblés avec $z > x^{\tau_1}$, alors on a

$$(5.34) \quad S(\mathcal{A}; h) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} S(\mathcal{B}; \sigma_q h) \ll \tau_1 \frac{\log x}{(\log z)^2} \sigma_q(F) \eta^2 x^2 + \Delta(|h|).$$

Démonstration du corollaire 5.3 en admettant provisoirement les résultats des paragraphes 6 et 7. Les lemmes 6.1, 6.3 et 6.7 fournissent respectivement une borne supérieure de $\Delta_0(|h|, x^{2\tau/3})$, $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ et $T(|h|)$ qui est négligeable, compte tenu des hypothèses sur τ et τ_1 . En utilisant la proposition 7.7 avec le choix $\xi = \tau^7$ ainsi que le lemme 7.1, on obtient majoration

$$S(|h|) \ll \eta^2 x^2 (\log x)^{-B} + \Delta(|h|)$$

valide pour tout $B > 0$. En utilisant le lemme 6.6 pour estimer $\Delta_1(|h|)$, $\Delta_2(|h|)$, $\Delta_3(|h|)$, $\tilde{\Delta}_1(|h|)$ et $\tilde{\Delta}_2(|h|)$, on en déduit finalement le résultat. \square

Il convient de souligner qu'un résultat similaire pour des fonctions h non bornées et à croissance suffisamment lente semble accessible à l'aide de la méthode développée dans cet article. Toutefois, obtenir les analogues des estimations du paragraphe 6 pour de telles fonctions h nécessiterait davantage de travail, ce qui aurait rendu la lecture particulièrement fastidieuse.

6. PREMIÈRES APPLICATIONS DES ESTIMATIONS DE SOMMES DE TYPE I

Dans cette partie, on utilise les estimations de sommes de Type I du paragraphe 3 pour établir des bornes des différents termes d'erreur impliqués dans le lemme 5.2, à l'exception de $S(|h|)$, qui fera l'objet du paragraphe 7 sur les estimations de sommes de Type II. À partir de maintenant, on suppose que la fonction arithmétique h est bornée en faisant l'hypothèse $|h(n)| \leq 1$ pour tout entier n .

Le lemme ci-dessous donne une majoration de la contribution des idéaux dont la norme appartient à $\Upsilon((\log x)^c)$, c'est-à-dire est divisible par un $p^k > (\log x)^c$ avec $k \geq 2$. Il en découle une majoration du terme $\Delta_0(|h|, x^{2\tau/3})$ défini par (5.26).

Lemme 6.1. *Soient $B \geq 0$. Il existe $c(B) > 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, on ait*

$$(6.1) \quad \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : F(n_1, n_2) \in \Upsilon((\log x)^{c(B)}) \right\} \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$(6.2) \quad \sum_{\substack{N(j) \leq x \\ N(j) \in \mathcal{T}((\log x)^{c(B)})}} \sigma_q(j) \ll x(\log x)^{-B}.$$

En particulier, si $|h| \leq 1$, il existe $c(B) > 0$ tel que

$$(6.3) \quad \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}) \ll x^2(\log x)^{-B}.$$

Ce résultat, qui s'inspire largement du lemme 2 de [Gre92], peut être considéré comme une extension du lemme 5 de [Del71] aux formes binaires.

Démonstration. Soit $C > 0$. Pour tout nombre premier p , on pose

$$k(p) := \max \left(2, \left\lfloor \frac{\log(C \log x)}{\log p} \right\rfloor + 1 \right).$$

Étant donné des entiers n_1 et n_2 tels que $(p, n_1 n_2) = 1$ et $p^{k(p)} | F(n_1, n_2)$, il existe ω tel que

$$F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \quad \text{et} \quad n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}}.$$

Par suite, on peut écrire d'après le lemme 1 de [Gre92] les inégalités

$$\begin{aligned} & \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : (p, n_1 n_2) = 1, p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \\ & \leq \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \# \left\{ 0 \leq n_1, n_2 \leq x : n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}} \right\} \\ & \leq \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \left(\frac{x^2}{p^{k(p)}} + O \left(\frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})} \right) \right) \end{aligned}$$

où

$$M_0(\omega, p^k) := \min_{\substack{(n_1, n_2) \neq (0, 0) \\ n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^k}}} \max(|n_1|, |n_2|).$$

Dans la mesure où le nombre de racines modulo p^k du polynôme $F(X_1, 1)$ est borné uniformément en p et $k \geq 1$, la contribution du terme principal peut-être estimée par

$$\begin{aligned} \sum_{p \ll x^{3/2}} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \frac{x^2}{p^{k(p)}} & \ll \sum_{p \leq (\log x)^{C/2}} \frac{x^2}{(\log x)^C} + \sum_{(\log x)^{C/2} < p \ll x^{3/2}} \frac{x^2}{p^2} \\ & \ll x^2 (\log x)^{-C/2}. \end{aligned}$$

On décompose le terme de reste en écrivant

$$\sum_{p \ll x^{3/2}} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})} = S_1 + S_2 + S_3$$

où

$$S_1 = \sum_{p \leq x^{1/2}} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})},$$

$$S_2 = \sum_{x^{1/2} < p \ll x^{3/2}} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \\ M_0(\omega, p^{k(p)}) > x^{3/4}}} \frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})}$$

et

$$S_3 = \sum_{x^{1/2} < p \ll x^{3/2}} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \\ M_0(\omega, p^{k(p)}) \leq x^{3/4}}} \frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})}.$$

En utilisant l'estimation triviale $M_0(\omega, p^k) \geq 1$ pour S_1 et l'hypothèse $M_0(\omega, p^{k(p)}) > x^{3/4}$ pour S_2 , on en déduit que

$$S_1 \ll \frac{x^{3/2}}{\log x} \quad \text{et} \quad S_2 \ll \frac{x^{7/4}}{\log x}.$$

De l'estimation

$$S_3 \ll \sum_{1 \leq n_1 \leq x^{3/4}} \frac{x}{n_1} \sum_{0 \leq n_2 \leq n_1} \sum_{\substack{x^{1/2} < p \\ p^2 | F(n_1, n_2)}} 1 \ll x^{7/4},$$

on déduit finalement que

$$\sum_{p \ll x^{3/2}} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : (p, n_1 n_2) = 1, p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \ll x^2 (\log x)^{-C/2}.$$

On regarde à présent la contribution des p , n_1 et n_2 tels que $p | n_1 n_2$. Si $p \nmid F(1, 0)F(0, 1)$, alors $p | (n_1, n_2)$ et l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{p \nmid F(1, 0)F(0, 1)} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : p | n_1 n_2, p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} &\leq \sum_{\substack{p \nmid F(1, 0)F(0, 1) \\ p \ll x^{3/2}}} \frac{x^2}{p^{2k(p)}} \\ &\ll x^2 (\log x)^{-C/2}. \end{aligned}$$

Inversement, si $p | F(1, 0)F(0, 1)$, alors les estimations (1.5) et (3.16) entraînent l'estimation

$$\begin{aligned} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^k | F(n_1, n_2) \right\} &\ll x^2 \frac{\gamma_F(p^k)}{p^{2k}} + X(\log x)^{C/2} (\log_2 x)^{7203} \\ &\ll x^2 (\log x)^{-2C/3}. \end{aligned}$$

En choisissant C suffisamment grand, il s'ensuit l'estimation (6.1).

Pour établir (6.2), on utilise la méthode de Rankin pour écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(j) \leq x \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^C)}} \sigma_q(j) &\ll \sum_{p \leq x^{1/2}} \sum_{k(p) \leq k} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k) \sum_{N(j) \leq x/p^k} \sigma_q(j) \\ &\ll x \sum_{p \leq x^{1/2}} \sum_{k(p) \leq k} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \sum_{N(j) \leq x} \frac{\sigma_q(j)}{N(j)}. \end{aligned}$$

Au vu de (4.22) et (4.15), il suit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(j) \leq x \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^C)}} \sigma_q(j) &\ll x(\log x)^{c(A)} \sum_{p \leq x^{1/2}} \sum_{k(p) \leq k} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \\ &\ll x(\log x)^{c(A)} \left(\sum_{p \leq (\log x)^{C/2}} \frac{1}{(\log x)^{2C/3}} + \sum_{(\log x)^{C/2} < p \leq x^{1/2}} \frac{1}{p^{4/3}} \right) \\ &\ll x(\log x)^{c(A)-C/6}, \end{aligned}$$

ce qui implique (6.2) quitte à choisir C suffisamment grand.

Sous l'hypothèse où h est borné, on observe que

$$\begin{aligned} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h_1(i)| \sigma_q(i) \sum_k |h_2(k)| \sum_{\substack{N(q) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(q)) > x^\tau}} 1_{\tilde{E}(k,i)}(q) \# \{ \mathfrak{K} : i\mathfrak{K}q \in \mathcal{B}, N(\mathfrak{K}) \in \Upsilon((\log x)^C) \} \\ \ll e^{O(\tau^{-1})} \sum_{\substack{N(j) \leq q^3 x^3 \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^C)}} \sigma_q(j). \end{aligned}$$

L'estimation (6.3) découle alors de (6.1) et (6.2). \square

Les estimations de Type I établies dans la section 3 permettent, au moyen d'un lemme de crible, de donner des bornes supérieures du bon ordre de grandeur des cardinaux $S(\mathcal{A}, i, C^-(z))$ et $S(\mathcal{B}, i, C^-(z))$ définies au paragraphe 4.1. De telles estimations seront centrales dans les majorations de $\Theta(|h|, y, z)$, $\Delta_1(|h|)$, $\Delta_2(|h|)$, $\Delta_3(|h|)$, $\tilde{\Delta}_1(|h|)$ et $\tilde{\Delta}_2(|h|)$.

Lemme 6.2. *Soient B_1 et $B_2 \geq 0$. Il existe $c(B_1, B_2) > 0$ tel que uniformément en $z > \log x$, on ait*

$$(6.4) \quad S(\mathcal{A}, i, C^-(z)) \ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log z} \frac{\sigma_q(i^-(z))}{N(i)} + R_{\mathcal{A}}(i, z)$$

et

$$(6.5) \quad S(\mathcal{B}, i, C^-(z)) \ll \frac{\eta c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(i) \log z} + R_{\mathcal{B}}(i, z)$$

avec

$$\sum_{N(i) z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^{B_1} R_{\mathcal{A}}(i, z) \ll x^2 (\log x)^{-B_2}$$

et

$$\sum_{N(i) z^2 \leq x^3 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^{B_1} \sigma_q(i) R_{\mathcal{B}}(i, z) \ll x^3 (\log x)^{-B_2}.$$

Démonstration. Puisque la fonction de densité $\gamma_q(i, \cdot)$ définie par (3.41) satisfait (3.43) et (3.44), elle vérifie les hypothèses du crible linéaire (Ω_0) et (Ω_1) de [HR74], à savoir l'existence d'un réel $A > 0$ tel que, uniformément en q, j et p , on ait

$$\gamma_q(i, p) \leq \frac{A}{p + A},$$

excepté pour les premiers p tels que $\gamma_q(i, p) = 1$, auquel cas $S(\mathcal{A}, i, z) = 0$ dès que $z \geq p$

On peut donc appliquer le théorème 6.2 de [HR74] ce qui entraîne

$$S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(z)) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq z} (1 - \gamma_q(\mathbf{i}, p)) + R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$$

où

$$R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z) := \sum_{d \leq z^2} \tau^2(d) |r(\mathcal{A}, I, d)|.$$

En estimant le terme de reste à l'aide du lemme 3.6, on en déduit l'existence d'une constante $c(B_1, B_2) > 0$ telle que

$$\sum_{N(\mathbf{i}) z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z) \ll x^2 (\log x)^{-B_2}.$$

Sous l'hypothèse $z > \log x$, la formule de crible (6.4) est une conséquence de l'estimation uniforme en $N(\mathbf{i}) \leq x^2$

$$\frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{\zeta_q(2)} \prod_{p \leq z} (1 - \gamma_q(\mathbf{i}, p)) \ll \frac{\sigma_q(F) \sigma_q(\mathbf{i}^-(z))}{\log z} \prod_{\substack{p|q \\ p > z}} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right)$$

qui suit de (4.8), (4.9) et (4.13).

Pour établir (6.5), il suffit de reproduire le même argument en utilisant le lemme 3.8 (resp. (4.7)) en lieu et place du lemme 3.6 (resp. (4.8), (4.9) et (4.13)). Il vient ainsi que, pour $c(B_2) > 0$ suffisamment grand, on a

$$\sum_{N(\mathbf{i}) z^2 \leq x^3 (\log x)^{-c(B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i}) R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z) \ll x^3 (\log x)^{-B_2} \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x^3} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})}.$$

En utilisant l'estimation $\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(m) \ll \tau(m)$ valide pour tout entier q -régulier m ainsi que (4.28), il s'ensuit que l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x^3} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} &\ll \sum_d \sum_{q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q(d)}{d^{5/6}} \sum_{m \leq x^3} \frac{\tau(m)^{c(B_1)}}{m} \\ &\ll (\log x)^{c(B_1)}. \end{aligned}$$

□

Une borne supérieure de la quantité $\Theta(|h|, y, z)$ définie par (5.25) peut être obtenue en s'inspirant de travaux antérieurs concernant les ordres moyens de fonctions arithmétiques sur les valeurs polynomiales. Par exemple, Tenenbaum [[Ten90], lemme 3.7] montre que, pour tout polynôme $F \in \mathbf{Z}[X_1]$, il existe $c(F) > 0$ tel que, uniformément en $z \geq y \geq 2$ et $x \geq 2$, on ait

$$\# \left\{ n \leq x : \prod_{\substack{p \leq y \\ p^\nu \parallel F(n)}} p^\nu > z \right\} \ll \exp \left(-c(F) \frac{\log z}{\log y} \right).$$

En vue d'obtenir un analogue de ce résultat au cas des formes binaires et de remplacer le terme $\frac{\log z}{\log y}$ par $\frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right)$, on peut adapter la preuve du théorème 1 de [Shi80], démarche à l'origine du résultat suivant.

Lemme 6.3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $z \geq y \geq \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}}\right)$, on ait

$$(6.6) \quad \#\{j \in \mathcal{A} : N(j^-(y)) > z\} \ll \eta^2 x^2 (\log_2(q+2))^{c_1} \exp\left(-c_2 \frac{\log z}{\log y} \log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right)$$

et

$$(6.7) \quad \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j^-(y)) > z}} \sigma_q(j) \ll \eta c(N_1, N_2) q^3 x^3 (\log_2(q+2))^{c_1} \exp\left(-c_2 \frac{\log z}{\log y} \log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right).$$

En particulier, si $h \leq 1$, on a

$$\Theta(|h|, y, z) \ll \eta^2 x^2 (\log_2 q)^{c_1} \exp\left(-c_2 \frac{\log z}{\log y} \log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $y \leq z^{1/4}$ et $z \leq x$, le résultat étant trivial autrement, au vu de (4.10). Étant donné un idéal j et la décomposition de la norme de sa partie q -régulière et y -friable

$$N(j_{q-r}^-(y)) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, p_i < p_{i+1},$$

on considère $j \geq 0$ le plus grand entier tel que

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \leq z^{1/2}$$

et on définit les diviseurs j_1 et j_2 de $j_{q-r}^-(y)$ par les conditions

$$N(j_1) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \quad \text{et} \quad N(j_2) = p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

On scinde l'ensemble des différents j tels que $N(j^-(y)) > Z$ en quatre classes :

- Classe I : $N(j_{q-s}) > z^{1/2}$,
- Classe II : $N(j_1) \leq z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,
- Classe III : $p_{j+1} \leq \log x \log_2 x$, $N(j_1) > z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,
- Classe IV : $\log x \log_2 x \leq p_{j+1} < Y$, $N(j_1) > z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,

et on estime la contribution de chacune de ces classes séparément.

Contribution de la classe I. Compte tenu de l'hypothèse $N(j_{q-s}) > z^{1/2}$, il existe un premier q -singulier p et un entier $k \geq 2$ tels que $p^k > z^{1/(2\omega(q)+2\omega_{1-s})}$ où ω_{1-s} désigne le nombre de premiers 1-singuliers. Au regard des conditions $q \leq (\log x)^A$ et $z > \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}}\right)$, on en déduit que l'estimation $p^k \gg_c (\log x)^c$ est valide pour tout $c > 0$. Par suite, le lemme 6.1 entraîne que, pour tout $B > 0$, il existe une constante $c(B) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \#\{j \in \mathcal{A} : N(j_{q-s}) > z^{1/2}\} &\ll \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq qx : F(n_1, n_2) \in \Upsilon((\log x)^{c(B)})\} \\ &\ll x^2 (\log x)^{-B} \end{aligned}$$

et

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j_{q-s}) > z^{1/2}}} \sigma_q(j) \ll \sum_{\substack{N(j) \leq q^3 x^3 \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^{c(B)})}} \sigma_q(j) \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe II. Dans la mesure où les idéaux de cette classe vérifient $N(j_1) \leq z^{1/4}$ et $N(j_{q-r}^-(y)) > z^{1/2}$, il s'ensuit que $p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} > z^{1/4}$. Sous l'hypothèse $y \leq z^{1/4}$, on a également

$\alpha_{j+1} \geq 2$ ce qui signifie que les idéaux de cette classe ont leur norme dans $\Upsilon(z^{1/4})$. En utilisant là encore le lemme 6.1, on en déduit que, pour tout $B > 0$, on a

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe II}\} \ll x^2(\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \text{ dans la classe II}}} \sigma_q(j) \ll x^3(\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe III. En utilisant successivement le lemme 3.4 puis la majoration $\alpha_q^{\mathbf{Z}}(m) \ll m^{1/2}(\log x)^c$ consécutive à (3.25), on remarque que, sous l'hypothèse $z \leq x$, on a par la méthode de Rankin

$$\begin{aligned} & \#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe III}\} \\ & \ll \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \sum_{\substack{z^{1/4} < N(i) \leq z^{1/2} \\ P^+(N(i)) \leq \log x \log_2 x}} \frac{\alpha_q(i)}{N(i)} + x^{15/8}(\log x)^c \\ & \ll (\log x)^c x^2 \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} \\ P^+(m) \leq \log x \log_2 x}} \frac{1}{m^{1/2}} \left(\frac{m}{z^{1/4}}\right)^{1/2} + x^{15/8}(\log x)^c \\ & \ll (\log x)^c x^2 Z^{-1/8} \Psi(x^{1/2}, \log x \log_2 x) + x^{15/8}(\log x)^c. \end{aligned}$$

L'estimation de De Bruijn de $\Psi(x, t)$, uniforme en $x \geq t > 2$, contenue dans le théorème 1 de [dB66]

$$\log \Psi(x, t) = \left(\frac{\log x}{\log t} \log \left(1 + \frac{t}{\log x} \right) + \frac{t}{\log t} \log \left(1 + \frac{\log x}{t} \right) \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log_2(2X)} \right) \right)$$

entraîne la majoration $\Psi(x^{1/2}, \log x \log_2 x) \ll \exp \left(O \left(\frac{\log x}{\log_2 x} \right) \right)$. Par suite, il suit de l'hypothèse $z \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}} \right)$, que l'on a, pour tout $B > 0$,

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe III}\} \ll x^2(\log x)^{-B}.$$

De façon similaire, le théorème 3.7 et les estimations (4.15), (5.9) et (4.22) impliquent

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ J \text{ dans la classe III}}} \sigma_q(j) & \ll (\log x)^c x^3 \sum_{\substack{z^{1/4} < m \leq z^{1/2} \\ P^+(m) \leq \log x \log_2 x}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m} + x^{7/3}(\log x)^c \\ & \ll (\log x)^c x^3 \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} \\ P^+(m) \leq \log x \log_2 x}} \frac{1}{m^{1/2}} \left(\frac{m}{z^{1/4}}\right)^{1/2} x^{7/3}(\log x)^c \\ & \ll x^3(\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Au vu de l'hypothèse $z \geq y \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}} \right)$, on déduit de ce qui précède que les contributions des classes I, II et III sont négligeables dans (6.6) et (6.7). La contribution principale proviendra ainsi des idéaux de la classe IV.

Contribution de la classe IV. On commence par découper l'ensemble de sommation de p_{j+1} en sous-intervalles du type $]z^{1/(s+1)}, z^{1/s}]$ avec $s_1 \leq s \leq s_2$ où

$$s_1 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log y} \right\rfloor \text{ et } s_2 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log(\log x \log_2 x)} \right\rfloor.$$

On observe alors que

$$\# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \ll \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} \sum_{\substack{i \text{ } q\text{-singulier} \\ N(i) \leq z^{1/2}}} \sum_{\substack{j_1 \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq N(j_1) < z^{1/2} \\ P^+(N(j_1)) < z^{1/s}}} S(\mathcal{A}, ij_1, C^-(z^{1/(s+1)})).$$

Puisque $z^{1/(s+1)} > \log x$ si $s \leq s_2$, on peut utiliser la formule (6.4) du lemme 6.2 pour en déduire que, pour tout $B > 0$, la contribution des idéaux dans la classe IV est majorée par

$$\frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\log z} \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} (s+1) \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d^-(Z^{1/(s+1)}))}{d} \sum_{\substack{m \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq m < z^{1/2} \\ P^+(m) \leq z^{1/s}}} \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Dans la mesure où $\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}$ satisfait les hypothèses du lemme 4 de [Shi80], on dispose de l'estimation de la somme intérieure, uniforme en $s \leq \log z / \log_2 z$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq m \\ P^+(m) \leq z^{1/s}}} \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m} &\ll \exp \left(\sum_{\substack{p \text{ } q\text{-régulier} \\ p \leq z^{1/s}}} \frac{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(p)}{p} - \frac{1}{20} s \log(s/2) \right) \\ &\ll \frac{\log z}{s} \exp \left(-\frac{1}{20} s \log(s/2) \right). \end{aligned}$$

Par suite, si $s \leq \log z / \log_2 x$, on remarque que

$$\begin{aligned} \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d^-(z^{1/(s+1)}))}{d} &= \prod_{\substack{p \text{ } q\text{-singulier} \\ p \leq z^{1/(s+1)}}} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \right) \prod_{\substack{p \text{ } q\text{-singulier} \\ p > z^{1/(s+1)}}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \\ &\ll \sum_{d \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \ll \log_2(q+2)^c \end{aligned}$$

d'après (4.10) ce qui implique l'estimation

$$\begin{aligned} &\# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \\ &\ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\log z} \log_2(q+2)^c \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} (s+1) \exp \left(-\frac{1}{20} s \log(s/2) \right) + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Au vu de l'hypothèse $z \geq y \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}} \right)$ et de l'estimation (4.10), on en déduit que

$$\# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \ll \eta^2 x^2 (\log_2 q)^c \exp \left(-\frac{1}{21} \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) \right).$$

En utilisant (6.5) au lieu de (6.4), on obtient également que

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ J \text{ dans la classe IV}}} \sigma_q(j) \ll \eta c(N_1, N_2) q^3 x^3 (\log_2 q)^c \exp \left(-\frac{1}{21} \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) \right)$$

ce qui permet de déduire (6.7). \square

À partir de maintenant, nous n'utiliserons le lemme 6.2 que pour un niveau de crible $z \geq x^\tau$. Le lemme suivant précise la borne supérieure disponible dans ce cadre là.

Lemme 6.4. *Soit $B \geq 0$. Il existe des constantes $c_1(B)$ et $c_2(B) > 0$ tels que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $z \geq (\log x)^{c_1(B)}$, et $C \subset (C^-((\log x)^{c_1(B)}))^2$ où $C^-(\cdot)$ est défini par (4.4), on ait, pour tout idéal \mathfrak{i} tel que $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$,*

$$(6.8) \quad \sum_{\substack{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ (N(\mathfrak{q}_1), N(\mathfrak{q}_2)) \in C \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^2(\log x)^{-c_2(B)}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, C^-(z)) \\ \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\log z} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{(d_1, d_2) \in C} \mu^2(d_1 d_2) \frac{\nu_{d_1 d_2}}{d_1 d_2} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}).$$

et

$$(6.9) \quad \sum_{\substack{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ (N(\mathfrak{q}_1), N(\mathfrak{q}_2)) \in C \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^3(\log x)^{-c_2(B)}}} S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, C^-(z)) \\ \ll \frac{c(N_1, N_2) \eta q^3 x^3}{N(\mathfrak{i}) \log z} \sum_{(d_1, d_2) \in C} \mu^2(d_1 d_2) \frac{\nu_{d_1 d_2}}{d_1 d_2} + R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i})$$

où ν_d est le nombre d'idéaux \mathfrak{j} tels que $N(\mathfrak{j}) = d$ et

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i})| \ll x^2 (\log x)^{-B} \quad \text{et} \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathfrak{i}) |R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i})| \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

Démonstration. Une application directe du lemme 6.2 donne

$$S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, C^-(z)) \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\log z} \frac{\sigma_q((\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)^-(z))}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, z)$$

avec

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^2(\log x)^{-c_2(B)}}} R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, z) \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

Dans la mesure où $z > (\log x)^{\max(A, 1)}$, on peut remarquer que, uniformément en \mathfrak{q}_1 et \mathfrak{q}_2 tels que $N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2) \leq x^2 (\log x)^{-c(B)}$, on a

$$\sigma_q((\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)^-(z)) \ll \sigma_q(\mathfrak{i}).$$

Quitte à choisir $c_1(B)$ suffisamment grand, on peut alors majorer la contribution des $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ avec facteur carré par

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \\ P^-(N(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)) \geq (\log x)^{c(B)} \\ \mu(N(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)) = 0 \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2) \ll x^2}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)} \ll \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau(\mathfrak{j})^2 \sigma_q(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})(\log x)^{c(B)}} \ll (\log x)^{-B}$$

ce qui achève la preuve de (6.8). Un raisonnement similaire permet d'établir (6.9). \square

Le lemme suivant, qui rappelle essentiellement les estimations (7.1) et (7.2) de [HB01], sera utilisé pour estimer les membres de droite de (6.8) et (6.9).

Lemme 6.5. *On a, uniformément en $y \geq z \geq 2$*

$$(6.10) \quad \sum_{y \leq p \leq yz} \frac{\nu_p}{p} \ll \frac{\log z}{\log y}$$

et

$$\sum_{z \leq p_1 < \dots < p_k \leq y} \frac{\nu_{p_1 \dots p_k}}{p_1 \dots p_k} \ll \frac{\left(\log \frac{\log y}{\log z} + O(1) \right)^k}{k!}.$$

Démonstration. La première majoration, analogue de la formule (7.1) de [HB01], est une conséquence du théorème des idéaux premiers. Au vu de la multiplicativité de ν_d , la seconde estimation provient de l'inégalité

$$\sum_{z \leq p_1 < \dots < p_k \leq y} \frac{\nu_{p_1}}{p_1} \dots \frac{\nu_{p_k}}{p_k} \leq \frac{1}{k!} \left(\sum_{z \leq p \leq y} \frac{\nu_p}{p} \right)^k \ll \frac{\left(\log \frac{\log y}{\log z} + O(1) \right)^k}{k!}.$$

\square

On établit dans le lemme suivant des estimations de $\Delta_1(|h|)$, $\Delta_2(|h|)$, $\Delta_3(|h|)$, $\tilde{\Delta}_1(|h|)$ et $\tilde{\Delta}_2(|h|)$, définies par les formules (5.27) à (5.31), suffisantes pour nos applications mais qui pourraient être précisées pour des fonctions h spécifiques.

Lemme 6.6. *Supposons que $|h| \leq 1$. On a, uniformément en $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,*

$$(6.11) \quad \Delta_1(|h|), \Delta_2(|h|), \Delta_3(|h|), \tilde{\Delta}_1(|h|), \tilde{\Delta}_2(|h|) \ll \tau_1 \eta^2 x^2.$$

De plus, si h est à support sur les entiers z -criblés avec $z \geq x^{\tau_1}$, alors on a

$$(6.12) \quad \Delta_1(|h|), \Delta_2(|h|), \Delta_3(|h|), \tilde{\Delta}_1(|h|), \tilde{\Delta}_2(|h|) \ll \sigma_q(F) \eta^2 x^2 \frac{\tau_1 \log x}{(\log z)^2}.$$

Démonstration. Observant qu'un idéal ne contribue qu'un nombre fini de fois pour chaque $\Delta_i(|h|)$ et $\tilde{\Delta}_i(|h|)$, il vient

$$\begin{aligned} \Delta_1(|h|), \tilde{\Delta}_1(|h|) \ll \max_{y \geq x^{\frac{3}{2} - \tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2 - \tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \\ y \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq yx^{\tau_1}}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(x^\tau)) \right. \\ \left. + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(x^\tau)) \right) \end{aligned}$$

et

$$\Delta_2(|h|), \tilde{\Delta}_2(|h|) \ll \max_{y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{y \leq N(\mathfrak{p}) \leq yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}, C^-(x^\tau)) + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}, C^-(x^\tau)) \right).$$

Pour majorer $\Delta_2(|h|)$ et $\tilde{\Delta}_2(|h|)$, on peut faire appel aux lemmes 6.4 et 6.5. Dans l'intervalle $x^{1/2-\tau_1} \leq y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$, on a la majoration suivante, valide pour tout $B > 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{y \leq N(\mathfrak{p}) \leq yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}, C^-(x^\tau)) + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}, C^-(x^\tau)) \right) \\ & \ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\tau \log x} \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{y \leq p \leq yx^{\tau_1}} \frac{\nu_p}{p} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \tau_1 \eta^2 x^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la majoration

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \leq \prod_{p \leq x^\tau} \sum_k \frac{\sigma_q^Z(p^k)}{p^k} \ll \frac{\tau \log x}{\sigma_q(F) \zeta_q(2)}$$

qui découle de (4.27). En utilisant (4.22), on peut borner la contribution des $y > X^{\frac{3}{2}-\tau_1}$ par

$$\begin{aligned} & \max_{y \leq x^{\frac{3}{2}+2\tau_1}} \sum_{y \leq N(\mathfrak{j}) \leq yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{j}, C^-(x^{3/2-\tau_1})) + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathfrak{j}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{j}, C^-(x^{3/2-\tau_1})) \right) \\ & \ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \max_{y \leq x^{\frac{3}{2}+2\tau_1}} \sum_{y \leq N(\mathfrak{j}) \leq yx^{\tau_1}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \tau_1 \eta^2 x^2 \end{aligned}$$

et on montre de même que $\Delta_1(|h|), \tilde{\Delta}_1(|h|) \ll \tau_1 \eta^2 x^2$.

Pour achever la démonstration de (6.11), on remarque également que la contribution de $\Delta_3(|h|)$ est inférieure à

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sum_k \sum_{x^\tau < N(\mathfrak{p}_2) \leq \dots \leq N(\mathfrak{p}_{k-1})} \max_{y \leq x^{1+\tau_1}} \sum_{\substack{x^\tau \leq N(\mathfrak{p}_1) \\ y \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq y(\log x)^c}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}_1 \dots \mathfrak{p}_{k-1}, C^-(x^2)) + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}_1 \dots \mathfrak{p}_{k-1}, C^-(x^2)) \right) \\ & \ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_k \sum_{x^\tau < p_2 < \dots < p_{k-1} < x^{1+\tau_1}} \max_{y \leq x^{1+\tau_1}} \sum_{y \leq p_1 \leq y(\log x)^c} \frac{\nu_{p_1 \dots p_{k-1}}}{p_1 \dots p_{k-1}} \\ & \quad + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \sigma_q(F) \eta^2 x^2 \frac{\log_2 x}{\log x} + x^2 (\log x)^{-B} \end{aligned}$$

pour tout $B > 0$.

On suppose désormais que h est à support sur les entiers z -criblés. En procédant comme précédemment, on peut majorer $\Delta_2(|h|)$ et $\tilde{\Delta}_2(|h|)$ par

$$\begin{aligned}
&\ll \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{y \leq N(\mathfrak{p}) \leq yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{p}, C^-(z)) + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}, \mathfrak{p}, C^-(z)) \right) \\
&\quad + \max_{y \leq x^{\frac{3}{2}+2\tau_1}} \sum_{\substack{y \leq N(\mathfrak{j}) \leq yx^{\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > z}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{j}, C^-(x^{3/2-\tau_1})) + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}, \mathfrak{j}, C^-(x^{3/2-\tau_1})) \right) \\
&\ll \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log z} \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{y \leq p \leq yx^{\tau_1}} \frac{\nu_p}{p} \\
&\quad + \sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_k \sum_{z < p_2 < \dots < p_k \leq x^{3/2}} \frac{\nu_{p_2 \dots p_k}}{p_2 \dots p_k} \max_{z < y} \sum_{y \leq p_1 \leq yx^{\tau_1}} \frac{\nu_{p_1}}{p_1} + x^2 (\log x)^{-B} \\
&\ll \sigma_q(F) \eta^2 x^2 \frac{\tau_1 \log x}{(\log z)^2}
\end{aligned}$$

et une estimation identique est valable pour $\Delta_1(|h|)$ et $\tilde{\Delta}_1(|h|)$. \square

Avec le choix de paramètre de crible $z = x^\tau$, on peut reproduire l'argument du paragraphe 6 de [HB01], basé sur le crible de Selberg, pour obtenir un équivalent asymptotique de $S(\mathcal{D}, \mathfrak{i}, C^-(x^\tau))$. Ceci valide la pertinence de (4.3) pour le choix de l'ensemble $C^-(x^\tau)$, conduisant ainsi à une borne supérieure de

$$T(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_{n \geq 0} \left| T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) - \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathfrak{i}) T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \right|$$

où $T^{(n)}(\mathcal{A}, \cdot)$ et $T^{(n)}(\mathcal{B}, \cdot)$ sont définis par (5.18).

Lemme 6.7. *Supposons que $|h| \leq 1$. Pour tout $B > 0$, on a uniformément en $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,*

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\tau^3 \log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathfrak{i})| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Démonstration. Ayant remarqué au cours de la preuve du lemme 6.2 que $\gamma(\mathfrak{i}, \cdot)$ et β satisfont les hypothèses du crible linéaire, on peut appliquer le théorème 7.1 de [HR74] avec les choix de paramètres ' $z' = x^\tau$ et ' $\zeta' = x^{\tau_1}$ '. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, C^-(x^\tau)) &= \eta^2 x^2 \sigma_q(F) \frac{\sigma_q(\mathfrak{i}) \alpha_q(\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right) \right) \\
&\quad + \sum_{d \leq x^{2\tau_1}} \tau^2(d) |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, d)|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, C^-(x^\tau)) &= \frac{c(N_1, N_2) \eta q^3 x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right) \right) \\
&\quad + \sum_{d \leq x^{2\tau_1}} \tau^2(d) |r(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, d)|.
\end{aligned}$$

Au vu de la définition (3.24), on observe alors que, pour tout idéal x^τ -criblé \mathfrak{j} admissible tel que $N(\mathfrak{j}) \ll x^2$, on a $\alpha_q(\mathfrak{j}) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right)$.

La contribution des idéaux $\mathfrak{qp}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ dont la norme possède des facteurs carrés peut être majorée par

$$(6.13) \quad \ll \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \left(\sum_{p > x^{\tau/2}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p > x^{\tau/3}} \frac{1}{p^3} \right) \ll x^{-\tau/2} \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})},$$

ce qui permet de déduire que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_n \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \cdots < N(\mathfrak{p}_n) \\ N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{1+\tau}}} \frac{|\alpha_q(\mathfrak{qp}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) - 1|}{N(\mathfrak{qp}_1 \cdots \mathfrak{p}_n)} &\ll \left(\tau^{-1} x^{-\tau} + x^{-\tau/2} \right) \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \\ &\ll x^{-\tau/2} (\log x)^c. \end{aligned}$$

Dans la mesure où $N(\mathfrak{iqp}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{2-3\tau_1+\tau}$, la contribution des termes $r(\mathcal{D}, \mathfrak{iqp}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, d)$ est négligeable au vu des lemmes 3.6 et 3.8. On en déduit alors que, pour tout $B > 0$,

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\tau \log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathfrak{i}_1)| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \ll x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) + x^2 (\log x)^{-B}.$$

En utilisant le lemme 6.5 pour estimer la contribution des idéaux \mathfrak{j} dont la norme est sans facteur carré et la majoration (6.13) pour les autres idéaux, il suit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \leq x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} &\ll \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \left(\sum_{p > x^{\tau/2}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p > x^{\tau/3}} \frac{1}{p^3} \right) + \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \ll x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \mu^2(N(\mathfrak{j})) \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \\ &\ll x^{-\tau/2} (\log x)^c + \sum_n 2^n \sum_{x^\tau < p_1 < \cdots < p_n \ll x^2} \frac{\nu_{p_1 \cdots p_n}}{p_1 \cdots p_n} \\ (6.14) \quad &\ll x^{-\tau/2} (\log x)^c + \sum_n \frac{2^n}{n!} (\log \tau^{-1} + 0(1))^n \ll \tau^{-2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. \square

7. ESTIMATIONS DE SOMMES DE TYPE II

Dans cette partie, on établit (cf. Proposition 7.7 *infra*) une majoration de

$$\begin{aligned} S(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathfrak{i})| \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}} |h_2(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})| \left| S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, C^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})) \right. \\ \left. - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, C^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})) \right| \end{aligned}$$

où les $C^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})$ sont définis par (5.23) et (5.13), (5.14), (5.15), (5.19), (5.20) et (5.21). On étend pour ce faire l'approche développée dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à savoir la transformation du problème en des estimations de sommes de Type II adéquates.

Au vu de (5.3) et (5.4), on peut réécrire les différents ensembles $C^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})$ sous la forme

$$C^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i}) = \bigcup_{(s_1, s_2) \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathfrak{n}, \mathfrak{i})} \mathcal{R}^{(i)}(\mathfrak{m}, (s_1, s_2), \mathfrak{i}) \times \{(s_1, s_2)\}$$

où

$$\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) := \left\{ (s_1, s_2) : \Omega(s_i) = \omega(s_i) = n_i, (s_1, s_2) \text{ satisfait } (E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i})) \text{ pour } 1 \leq j \ll \tau^{-1} \right\},$$

où $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ désigne une inégalité du type

$$yN(\mathbf{i})^\varepsilon P^{(\vec{\alpha}^{(1)})}(s_1)P^{(\vec{\alpha}^{(2)})}(s_2) \prec P^{(\vec{\beta}^{(1)})}(s_1)P^{(\vec{\beta}^{(2)})}(s_2)$$

avec $y > 0$, $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ et \prec désigne l'ordre \leq ou $<$,

$$\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) := \left\{ (r_1, r_2) : \Omega(r_i) = \omega(r_i) = m_i, P^-(r_1 r_2) > x^\tau, \right. \\ \left. (r_1, r_2) \text{ satisfait } (F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i})) \text{ pour } 1 \leq j \ll \tau^{-1} \right\}$$

où $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$ désigne une inégalité du type

$$yN(\mathbf{i})^\varepsilon P^{(\vec{\alpha}^{(1)})}(s_1)P^{(\vec{\alpha}^{(2)})}(s_2)P^{(\vec{\gamma}^{(1)})}(r_1)P^{(\vec{\gamma}^{(2)})}(r_2) \\ \prec P^{(\vec{\beta}^{(1)})}(s_1)P^{(\vec{\beta}^{(2)})}(s_2)P^{(\vec{\delta}^{(1)})}(r_1)P^{(\vec{\delta}^{(2)})}(r_2).$$

Soulignons que les $((E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i})))$ et $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$ introduits ci-dessus correspondent non seulement aux ensembles $E_j(k)$ définis dans 5.4 qui interviennent dans la définition de h , mais aussi aux contraintes relatives à la définition des $C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$, en particulier la condition importante $X^{1+\tau} \leq s_1 s_2 \leq x^{3/2-\tau}$.

La première étape dans l'estimation de $S(\mathcal{D}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ consiste à rendre les ensembles $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i})$ indépendants de (s_1, s_2) et \mathbf{i} . Pour ce faire, on introduit un paramètre $\xi \leq \tau$ que l'on explicitera dans les applications du paragraphe 8. Dans leurs travaux, Heath-Brown et Moroz effectuent le choix $\xi = (\log_2 x)^{-\varpi_2}$ où $0 < \varpi_2 < 1$. À la lecture de [HB01] et [HBM02], il apparaît en fait que leurs arguments demeurent valables pour des ξ satisfaisant $(\log x)^{-\varpi_2} \leq \xi$ où $0 < \varpi_2 < 1$, hypothèse que l'on suppose à présent. Une idée importante dans l'estimation de $S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ consiste à trier les facteurs $P^{(\vec{\alpha})}(s_i)$ dans des intervalles du type $[x^{v\xi}, x^{(v+1)\xi}]$ puis à remplacer les occurrences de $P^{(\vec{\alpha})}(s_i)$ par $x^{v\xi}$ dans les inégalités, procédure que l'on détaille ci-dessous. Posant $v_0 := \left\lfloor \frac{\log N(\mathbf{i})}{\xi \log x} \right\rfloor$, on introduit les ensembles d'exposants

$$(7.1) \quad \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)) := \left\{ \vec{v} \in \mathbf{Z}^{n_1} \times \mathbf{Z}^{n_2} : \vec{v} \text{ satisfait } (\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)) \text{ pour } 1 \leq j \ll \tau^{-1} \right. \\ \left. \text{et } v_i \neq v_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

où $\vec{v} := (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)})$ et $(\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$ désigne l'inégalité associée à $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ définie par

$$\frac{\log y}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0 + 1) + \sum_{k=1}^{k_1} (v_{\alpha_k^{(1)}}^{(1)} + 1) + \sum_{k=1}^{k_2} (v_{\alpha_k^{(2)}}^{(2)} + 1) < \sum_{l=1}^{l_1} v_{\beta_l^{(1)}}^{(1)} + \sum_{l=1}^{l_2} v_{\beta_l^{(2)}}^{(2)}$$

ainsi que

$$\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0) := \left\{ (r_1, r_2) : \Omega(r_i) = \omega(r_i) = m_i, \right. \\ \left. (r_1, r_2) \text{ satisfait } (\widehat{F}_j^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) \text{ pour } 1 \leq j \ll \tau^{-1} \right\}$$

où $(\widehat{F}_j^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0))$ désigne l'inégalité associée à $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$ définie par

$$\begin{aligned} & \frac{\log \left(y P^{(\vec{\gamma}^{(1)})}(r_1) P^{(\vec{\gamma}^{(2)})}(r_2) \right)}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0 + 1) + \sum_{k=1}^{k_1} (v_{\alpha_k^{(1)}}^{(1)} + 1) + \sum_{k=1}^{k_2} (v_{\alpha_k^{(2)}}^{(2)} + 1) \\ & < \frac{\log \left(P^{(\vec{\delta}^{(1)})}(r_1) P^{(\vec{\delta}^{(2)})}(r_2) \right)}{\xi \log x} + \sum_{l=1}^{l_1} v_{\beta_l^{(1)}}^{(1)} + \sum_{l=1}^{l_2} v_{\beta_l^{(2)}}^{(2)}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous adaptons la méthode du paragraphe 3 de [HB01] et du paragraphe 5 de [HBM02]. On introduit, pour $\vec{v} \in \mathbf{N}^{n_1} \times \mathbf{N}^{n_2}$, le poids $d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{v})$ en posant

$$(7.2) \quad d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{v}) = \frac{\log N(\mathbf{p}_1^{(1)}) \cdots \log N(\mathbf{p}_{n_1}^{(1)}) \log N(\mathbf{p}_1^{(2)}) \cdots \log N(\mathbf{p}_{n_2}^{(2)})}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}}$$

si $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2$ où $\Omega(N(\mathbf{s}_i)) = \Omega_{\mathbf{K}}(\mathbf{s}_i) = n_i$, $\mathbf{s}_i = \mathbf{p}_1^{(i)} \cdots \mathbf{p}_{n_i}^{(i)}$ avec $x^{v_k^{(i)}} \xi \leq N(\mathbf{p}_k^{(i)}) < x^{(v_k^{(i)}+1)\xi}$ pour $1 \leq k \leq n_i$ et $i = 1$ et 2 , et $d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{v}) = 0$ sinon. On pose également, pour tout sous-ensemble \mathcal{R} de \mathbf{N}^2 ,

$$(7.3) \quad b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (N(\mathbf{r}_1), N(\mathbf{r}_2)) \in \mathcal{R}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans l'esprit du lemme 3.7 de [HB01] et du lemme 5.1 de [HBM02], il est naturel d'approcher $S(\mathcal{D}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ par la quantité

$$\widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) := \sum_{\vec{v} \in \mathcal{L}(S^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0))$$

où

$$(7.4) \quad \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) := \sum_{\substack{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s} \in \mathcal{D}}} b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{v}).$$

Il en résulte l'apparition des termes d'erreur

$$(7.5) \quad R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \left(R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + \frac{\sigma_q(F)\eta}{c(N_1, N_2)q^3x} \sigma_q(\mathbf{i}) R(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right)$$

où, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} ,

$$R(\mathcal{D}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) = \left| S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right|.$$

On peut obtenir une borne supérieure de telles quantités en reproduisant les différentes étapes de la démonstration du lemme 3.7 de [HB01] qui utilisent essentiellement les lemmes 6.4 et 6.6.

Lemme 7.1. *Supposons que $|h| \leq 1$. Pour tout $B > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $\xi \leq \tau^2$,*

$$(7.6) \quad \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(1)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \ll \left(\xi \tau^{-6} \frac{\sigma_q(F)\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{|h_1(\mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B} \right)$$

et, pour $i \in \{2, \dots, 5\}$,

$$(7.7) \quad \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \ll \xi \tau^{-6} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{|h_1(\mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B} + \Delta_4(|h|)$$

où

$$(7.8) \quad \Delta_4(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{m, n} \sum_{j \leq D_k} \Delta_j(m+n, \mathcal{A}, \mathbf{i}, |h|) + \frac{\sigma_q(F) \eta}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathbf{i}) \Delta_j(m+n, \mathcal{B}, \mathbf{i}, |h|)$$

et, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} , $\Delta_j(k, \mathcal{D}, \mathbf{i}, |h|)$,

$$\begin{aligned} \Delta_j(k, \mathcal{D}, \mathbf{i}, |h|) &:= \# \left\{ \mathbf{ij} \in \mathcal{D} : x^\tau < P^-(N(\mathbf{j})), P^+(N(\mathbf{j})) \leq x^{1-\tau}, \right. \\ &\quad x^{1-\tau_1} \leq P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathbf{j})), P^{(\vec{\beta})}(N(\mathbf{j})) \leq x^{1+\tau_1}, \\ &\quad \left. y P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathbf{j})) \leq P^{(\vec{\beta})}(N(\mathbf{j})) \leq y x^{O(\xi \tau^{-1})} P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathbf{j})) \right\} \end{aligned}$$

pour les y , $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ introduits dans la définition (5.4) de $E_j(k)$.

Démonstration. On ne décrit ci-dessous que la contribution des termes $R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$, le traitement de $R(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ étant en tout point similaire. Soient \mathbf{i} un idéal tel que $N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}$ et $v_0 = \left\lfloor \frac{\log N(\mathbf{i})}{\xi \log x} \right\rfloor$. On peut décomposer le terme d'erreur $R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ sous la forme

$$R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \leq R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$$

où le terme $R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ résulte de l'introduction de $\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$, c'est-à-dire défini comme la différence

$$\left| S(\mathcal{A}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \\ d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \neq 0}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i})) \right|$$

le terme $R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ provient du remplacement de 1 par $d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v})$ et vaut ainsi

$$\sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \\ d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \neq 0}} |1 - d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v})| b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i}))$$

et le terme $R_3(\mathcal{A}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ apparaît en remplaçant $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i})$ par l'ensemble $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)$, c'est-à-dire

$$R_3(\mathcal{A}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) = \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2} d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \Delta(\mathcal{A}, \mathbf{m}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathbf{i})$$

où

$$\Delta(\mathcal{A}, \mathbf{m}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathbf{i}) := \# \left\{ (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) : (N(\mathfrak{r}_1), N(\mathfrak{r}_2)) \in \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i}) \Delta \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \right. \\ \left. \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \right\}$$

où Δ désigne la différence symétrique.

Au vu de la définition des $(\tilde{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$, on observe que tous les idéaux \mathfrak{s}_1 et \mathfrak{s}_2 comptés dans $\hat{S}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ apparaissent dans $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$. Par suite, dans la mesure où

$$(7.9) \quad 1 - d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{p}_1^{(1)} \cdots \mathfrak{p}_{n_1}^{(1)} \mathfrak{p}_1^{(2)} \cdots \mathfrak{p}_{n_2}^{(2)}, \vec{v}) = 1 - \frac{\log N(\mathfrak{p}_1^{(1)})}{v_1^{(1)} \xi \log x} \cdots \frac{\log N(\mathfrak{p}_{n_1}^{(1)})}{v_{n_1}^{(1)} \xi \log x} \frac{\log N(\mathfrak{p}_1^{(2)})}{v_1^{(2)} \xi \log x} \cdots \frac{\log N(\mathfrak{p}_{n_2}^{(2)})}{v_{n_2}^{(2)} \xi \log x} \ll \xi \tau^{-2}$$

dès que $x^{v_k^{(i)} \xi} \leq N(\mathfrak{p}_k^{(i)}) < x^{(v_k^{(i)} + 1) \xi}$ (cf [[HB01] p.44]), il vient l'inégalité

$$(7.10) \quad R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) = \xi \tau^{-2} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})).$$

On sépare la suite de la démonstration en deux parties selon que $i = 1$ ou non.

Cas $i \in \{2, \dots, 5\}$. Au vu des définitions (5.13), (5.14), (5.15) et (5.16) de $C^{(i)}(m, n)$, il existe au plus un couple (m, n) pour lequel un idéal \mathfrak{rs} donné appartienne à $C^{(i)}(m, n)$. Par suite, on peut observer, en suivant l'argument de la preuve du lemme 3.7 de [HB01] que l'on a, pour tout $N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} ,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) &\ll \tau^{-1} \sum_n \max_{\Delta \in \Delta(0, n)} \sum_{\substack{(1, N(\mathfrak{s})) \in \Delta \\ N(\mathfrak{s}) \leq x^{\frac{3}{2} - \tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau)) \\ &+ \sum_n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) \\ N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{3/2 - \tau} \\ N(\mathfrak{p}_{j+1}) \leq x^\xi N(\mathfrak{p}_j)}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, C^-(x^\tau)) \end{aligned}$$

où $\Delta(m, n)$ désigne l'ensemble des parties Δ de la forme

$$(7.11) \quad \Delta := \left\{ (r, s) : \Omega(r) = \omega(r) = m, \Omega(s) = \omega(s) = n, P^-(rs) > x^\tau, \right. \\ \left. y P^{(\vec{\gamma})}(r) P^{(\vec{\alpha})}(s) \leq P^{(\vec{\delta})}(r) P^{(\vec{\beta})}(s) \leq y x^{O(\xi \tau^{-1})} P^{(\vec{\gamma})}(r) P^{(\vec{\alpha})}(s) \right\}.$$

En utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, il suit ainsi l'estimation

$$\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \ll \xi \tau^{-5} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

valide pour tout $B \geq 0$.

Dans la mesure où $\sum_{m, n} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(m, n)) \leq S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau))$, la majoration

$$\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))_+ \ll \xi \tau^{-3} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

est aussi une conséquence immédiate du lemme 6.4 combiné à (7.10).

En considérant $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$, on remarque que des termes d'erreur proviennent de la contribution des idéaux \mathfrak{irs} satisfaisant les conditions $P^-(N(\mathfrak{s}))x^{-\xi} \leq P^+(N(\mathfrak{r})) \leq P^-(N(\mathfrak{s}))$ ou $P^+(N(\mathfrak{s})) \leq P^-(N(\mathfrak{r})) \leq P^+(N(\mathfrak{s}))x^\xi$. D'autres termes d'erreur apparaissent également lors du remplacement de la condition $N(\mathfrak{rs}) \in E_j(m + n)$, réécrite sous la forme

$$(7.12) \quad y P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathfrak{s})) P^{(\vec{\gamma})}(N(\mathfrak{r})) \prec P^{(\vec{\beta})}(N(\mathfrak{s})) P^{(\vec{\delta})}(N(\mathfrak{r})),$$

par

$$\frac{\log\left(yP^{(\vec{\gamma})}(N(\mathfrak{r}))\right)}{\xi \log x} + \sum_{k=1}^{k_1} (v_{\alpha_k^{(1)}}^{(1)} + 1) < \frac{\log\left(P^{(\vec{\delta})}(N(\mathfrak{r}))\right)}{\xi \log x} + \sum_{l=1}^{l_1} v_{\beta_l^{(1)}}^{(1)}.$$

et $d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{v}) \neq 0$. On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) &\ll \sum_{x^{1+\tau} < N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \leq x^\xi N(\mathfrak{p}_1)} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(x^\tau)) \\ &+ \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \leq x^\xi N(\mathfrak{p}_1) \\ N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau_1}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(x^\tau)) \\ &+ \sum_j \sum_{(N(\mathfrak{r}), N(\mathfrak{s})) \in \Delta(E_j)} S(\mathcal{A}, \mathbf{r}\mathfrak{s}, C^-(x^\tau)) \end{aligned}$$

où $\Delta(E_j)$ désigne l'ensemble défini par (7.11) où l'inégalité sur les facteurs premiers est celle associée à (7.12). On décompose la sommation correspondant à $\Delta(E_j)$ en quatre composantes en introduisant les conditions supplémentaires

$$\begin{aligned} - P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathfrak{s}))P^{(\vec{\gamma})}(N(\mathfrak{r})) &\leq x^{1-\tau_1} \text{ ou } P^{(\vec{\beta})}(N(\mathfrak{s}))P^{(\vec{\delta})}(N(\mathfrak{r})) \leq x^{1-\tau_1}; \\ - P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathfrak{s}))P^{(\vec{\gamma})}(N(\mathfrak{r})) &> x^{1+\tau_1} \text{ ou } P^{(\vec{\beta})}(N(\mathfrak{s}))P^{(\vec{\delta})}(N(\mathfrak{r})) > x^{1+\tau_1}; \\ - x^{1-\tau_1} < P^{(\vec{\alpha})}(N(\mathfrak{s}))P^{(\vec{\gamma})}(N(\mathfrak{r})) &\leq x^{1+\tau_1} \text{ et } x^{1-\tau_1} < P^{(\vec{\beta})}(N(\mathfrak{s}))P^{(\vec{\delta})}(N(\mathfrak{r})) \leq x^{1+\tau_1}. \end{aligned}$$

Ceci permet de borner la contribution des différents $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ par

$$\begin{aligned} (7.13) \quad &\ll \sum_{j \leq D_k} \Delta_j(m+n, \mathcal{A}, \mathbf{i}, |h|) + \tau^{-1} \sum_{\substack{x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{j}_1) \leq N(\mathfrak{j}_2) \leq N(\mathfrak{j}_1)x^{O(\xi\tau^{-1})} \\ P^-(N(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2)) > x^\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2, C^-(x^\tau)) \\ &+ \tau^{-1} \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}_2)=N(\mathfrak{j}_1)x^{O(\xi\tau^{-1})} \\ N(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2) \leq x^{2-2\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2)) > x^\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2, C^-(x^\tau)), \end{aligned}$$

où les Δ_j ont été définis dans l'énoncé du lemme 7.1.

Observant que les lemmes 2.4, 6.4 et 6.5 permettent d'écrire les bornes supérieures

$$\begin{aligned} &\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}_2)=N(\mathfrak{j}_1)x^{O(\xi\tau^{-1})} \\ N(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2) \leq x^{2-2\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2)) > x^\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2, C^-(x^\tau)) \\ &\ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\tau \log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \frac{\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \sum_{m,n} \sum_{\substack{x^\tau < p_1 < \dots < p_m \ll x^2 \\ x^\tau < p'_1 < \dots < p'_n \ll x^2 \\ p'_1 \dots p'_n = p_1 \dots p_m x^{O(\xi\tau^{-1})}}} \frac{\nu_{p_1 \dots p_m}}{p_1 \dots p_m} \frac{\nu_{p'_1 \dots p'_n}}{p'_1 \dots p'_n} + x^2 (\log x)^{-B} \\ &\ll \xi \tau^{-5} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{j}_1) \leq N(\mathbf{j}_2) \leq N(\mathbf{j}_1)x^{O(\xi\tau^{-1})} \\ P^-(N(\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2)) > x^\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2, C^-(x^\tau)) \\
& \ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{j}_3) = \frac{x^{3+O(\xi\tau^{-1})}}{N(\mathbf{i}\mathbf{j}_1)} \\ N(\mathbf{i}\mathbf{j}_1\mathbf{j}_3) \leq x^{2-\tau}(\log x)^c \\ P^-(N(\mathbf{i}\mathbf{j}_1\mathbf{j}_3)) > x^\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{j}_1\mathbf{j}_3, C^-(x^\tau)) \\
& \ll \xi\tau^{-5} \frac{\sigma_q(F)\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathbf{i})|\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2(\log x)^{-B},
\end{aligned}$$

on déduit de (7.13) une estimation de $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ ce qui achève l'estimation de $R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ lorsque $i \in \{2, \dots, 5\}$.

Cas $i = 1$. En observant que le nombre de couples (\mathbf{m}, \mathbf{n}) dans lequel intervient chaque idéal $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ est borné si $N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2) \ll x^3(\log x)^c$, les arguments précédents s'adaptent sans difficulté nouvelle pour estimer la contribution issues de $C^{(1)}(\mathbf{m}, (1, 0), \mathbf{i})$ et $C^{(1)}((2, 0), \mathbf{n}, \mathbf{i})$, conduisant aux bornes supérieures

$$\sum_{\mathbf{m}} R^{(1)}(\mathbf{m}, (1, 0)) \ll \xi\tau^{-3} \frac{\sigma_q(F)\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathbf{i})|\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2(\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\mathbf{n}} R^{(1)}((2, 0), \mathbf{n}) \ll \xi\tau^{-4} \frac{\sigma_q(F)\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathbf{i})|\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2(\log x)^{-B}$$

et il suffit d'estimer $R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i}))$ lorsque $n \geq 2$.

Au vu de la définition (5.20) de $C^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})$, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{m}} R_1(\mathcal{A}, C^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})) \\
& \ll \sum_{j \ll \tau^{-1}} \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{r}_1)) \geq x^\tau}} \sum_{(N(\mathfrak{p}_1), \dots, N(\mathfrak{p}_n)) \in \Delta_j(n)} S(\mathcal{A}, \mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, C^-(N(\mathfrak{p}_1)))
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta_j(n) := \{ & (p_1, \dots, p_n) : x^\tau < p_1 < \cdots < p_n < x^{1-\tau}, \\
& p_2 \cdots p_n \leq x^{1+\tau} < p_1 \cdots p_n \leq x^{3/2-\tau}, (p_1, \dots, p_n) \text{ satisfait } E(n) \}
\end{aligned}$$

et $E(n)$ désigne une inégalité d'une des formes suivantes :

$$x^\tau \leq p_1 \leq x^{\tau+\xi}, \quad x^{1+\tau-O(\xi\tau^{-1})} \leq p_2 \cdots p_n \leq x^{1+\tau}, \quad x^{1+\tau} \leq p_1 \cdots p_n \leq x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})},$$

$$x^{3/2-\tau-O(\xi\tau^{-1})} \leq p_1 \cdots p_n \leq x^{3/2-\tau} \quad \text{ou} \quad p_j < p_{j+1} \leq x^\xi p_j.$$

On traite la contribution des inégalités

$$x^{1+\tau} \leq p_1 \cdots p_n \leq x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})} \quad \text{et} \quad x^{3/2-\tau-O(\xi\tau^{-1})} \leq p_1 \cdots p_n \leq x^{3/2-\tau}$$

en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5. En effet, le lemme 2.4 nous amène à estimer la contribution des idéaux \mathfrak{i} , \mathfrak{r}_1 et \mathfrak{r}_2 satisfaisant

$$N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = yx^{O(\tau^{-1}\xi)}.$$

avec $y = x^{3/2-\tau}$ ou $x^{2-\tau}$ et l'on observe que l'on a

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{P^-(N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)) \geq x^\tau \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = yx^{O(\xi\tau^{-1})}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, C^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi\tau^{-5}\sigma_q(F) \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathfrak{i})|\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Supposons $n \geq 3$. Pour les ensembles $\Delta_j(n)$ restants, au moins l'un des p_i n'apparaît pas dans la définition de $E(n)$, disons p_1 . Observant que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{(N(\mathfrak{p}_1), \dots, N(\mathfrak{p}_n)) \in \Delta_j(n)} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, C^-(N(\mathfrak{p}_1))) \\ & \ll \tau^{-1} \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_2) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) \\ (1, N(\mathfrak{p}_2), \dots, N(\mathfrak{p}_n)) \text{ satisfait } E(n) \\ N(\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{n-1}, C^-(x^\tau)), \end{aligned}$$

on déduit en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5 l'estimation

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathfrak{i})| \sum_{\mathbf{m}} \sum_{n \geq 3} R_1(\mathcal{A}, C^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathfrak{i})) \\ & \ll \xi\tau^{-6} \frac{\sigma_q(F)\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathfrak{i})|\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Si $n = 2$, l'argument précédent échoue uniquement pour l'inégalité $p_1 < p_2 \leq p_1 x^\xi$. Le cas échéant, il apparaît que $x^{1/2} < p_1 < x^{3/4-\tau/2}$ ce qui permet de majorer cette contribution par

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) \leq N(\mathfrak{p}_1)x^\xi \leq x^{\frac{3}{4}}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi\tau^{-1} \frac{\sigma_q(F)\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathfrak{i})|\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Par des arguments similaires, les estimations (7.9) et (7.10) permettent de majorer la contribution des termes $R_2(\mathcal{A}, C^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathfrak{i}))$ par

$$\begin{aligned} & \ll \xi\tau^{-3} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{n \geq 2} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_2) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) \\ N(\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n, C^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi\tau^{-6} \frac{\sigma_q(F)\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathfrak{i}) \frac{|h_1(\mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Achevons la démonstration du lemme en étudiant $R_3(\mathcal{A}, C^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathfrak{i}))$. Les arguments précédents s'adaptent sans difficulté pour estimer les différentes contributions, à l'exception de l'inégalité

$$P^-(s) \leq P^-(r_2) \leq P^-(s)x^\xi.$$

Si $n \geq 3$, on majore ce terme d'erreur par

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_n) \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi \\ N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{n-1}) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{ir}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n, C^-(N(\mathbf{p}))) \\ & \ll \tau^{-2} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_{n-2}) \\ N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi \\ N(\mathbf{p} \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{n-2}) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{ir}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{n-2}, C^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-6} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Lorsque $n = 2$, il advient que $P^-(s) \leq x^{3/4}$ et la contribution de tels idéaux est inférieure à

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq x^{1/2} \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi}} S(\mathcal{A}, \mathbf{ir}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1, C^-(N(\mathbf{p}_1))) \\ & + \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h_1(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathbf{p}_1) \leq x^{3/4} \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi}} S(\mathcal{A}, \mathbf{ip} \mathbf{p}_1, C^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-4} \frac{\sigma_q(F) \eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h_1(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

□

Au vu du lemme précédent, il convient de montrer que $\frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x^3} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ constitue une bonne approximation de $\widehat{S}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$. Estimer $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ se réduit essentiellement à étudier les idéaux $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n$ tels que $(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n))$ appartienne à l'ensemble

$$G(\vec{v}, t) := \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^n : x_i \in [x^{v_i \xi}, x^{(v_i+1)\xi}] \left[\text{pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } \prod_{i=1}^n x_i \leq t \right] \right\}$$

Pour considérer de tels idéaux, Heath-Brown obtient dans [HB01] la généralisation suivante du théorème des idéaux premiers.

Lemme 7.2 ([HB01], Lemme 4.10). *Il existe $c > 0$ tel que, uniformément en $t \geq 1$, $x \geq 2$, $1 \leq n \ll \tau^{-1}$ et $\vec{v} \in \mathbf{N}^n$ satisfaisant $\tau \leq v_j \xi$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on a*

$$(7.14) \quad \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in G(\vec{v}, t)} \prod_{i=1}^n \log N(\mathbf{p}_i) = w(t) + O\left(t \exp(-c\sqrt{\log x^\tau})\right)$$

où $w(t) = w(\vec{v}, t)$ désigne la mesure de $G(\vec{v}, t)$.

Le comportement analytique de la fonction w définie dans le lemme 7.2 a été étudié dans le paragraphe 8 de [HB01].

Lemme 7.3 (Formules (8.3) et (8.4) de [HB01]). *Pour $t > 0$, $h \geq 0$ et $n \geq 2$, on a*

$$|w'(t+h) - w'(t)| \leq \frac{h}{t} (\xi \log x)^{n-2}$$

et

$$0 \leq w'(t) \leq (\xi \log x)^{n-1}.$$

De plus, si $n = 1$, alors la dérivée à droite $w'(v_1, t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[x^{v_1\xi}, x^{(v_1+1)\xi}]$.

En reproduisant l'argument développé dans le paragraphe 10 de [HB01], on peut utiliser les lemmes 7.2 et 7.3 pour obtenir une estimation de $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$.

Lemme 7.4. Soit $i \in \{1, \dots, 5\}$. On a, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $v_0 \geq 0$ et $I \in \mathcal{I}$ tel que $N(\mathbf{i}) \in [x^{v_0\xi}, x^{(v_0+1)\xi}]$,

$$(7.15) \quad \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \frac{\eta c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i})} \sum_{\vec{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v}) \right| \ll \frac{\eta^2 c(N_1, N_2) q^3 x^3}{\xi^2 N(\mathbf{i})}$$

où

$$(7.16) \quad \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}, \vec{v}) = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R})}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2} N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right).$$

Démonstration. Compte tenu des définitions (7.1), (7.4) et (7.3), il suffit de montrer que, uniformément en $n \geq 1$, $\vec{v} \in \mathbf{N}^n$ tel que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$, $\tau \leq \xi v_i$ et tout ensemble $\mathcal{R}(\mathbf{m})$ tel que

$$\mathcal{R}(\mathbf{m}) \subset \{(r_1, r_2) : \Omega(r_1) = \omega(r_1) = m_1, \Omega(r_2) = \omega(r_2) = m_2 \text{ et } P^-(r_1 r_2) > x^\tau\},$$

on a

$$(7.17) \quad \sum_{\mathbf{m}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) - c(N_1, N_2) q^3 x^3 \eta \frac{\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v})}{N(\mathbf{i})} \right| \ll \frac{\eta^2 c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i}) v_1 \dots v_n}$$

où

$$\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) := \sum_{\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s} \in \mathcal{D}} b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m})) d_n(\mathbf{s}, \vec{v}),$$

$$\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{v_1 \dots v_n (\xi \log x)^n N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right)$$

et

$$d_n(\mathbf{s}, \vec{v}) = \begin{cases} \frac{\log N(\mathbf{p}_1) \dots \log N(\mathbf{p}_n)}{v_1 \dots v_n} & \text{si } \mathbf{s} = \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n \text{ avec } N(\mathbf{p}_i) \in [x^{v_i\xi}, x^{(v_i+1)\xi}] , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une fois établie cette estimation, la majoration (7.15) se déduira directement de l'inégalité

$$(7.18) \quad \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\vec{v} \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)} \frac{1}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)}} \leq \left(\sum_n \frac{1}{n!} \left(\sum_{v \ll \xi^{-1}} \frac{1}{v} \right)^n \right)^2 \ll \xi^{-2}.$$

Au vu de (7.2) et (7.4), on peut écrire

$$(7.19) \quad \begin{aligned} & \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) \\ &= \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{v_1 \dots v_n (\xi \log x)^n} \sum_{\substack{x^{v_1\xi} \leq N(\mathbf{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \dots \\ x^{v_n\xi} \leq N(\mathbf{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} < N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n) \leq \frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (1+\eta)}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathbf{p}_i). \end{aligned}$$

Estimant la somme intérieure à l'aide du lemme 7.2, il vient

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{x^{v_1\xi} \leq N(\mathfrak{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \dots \\ x^{v_n\xi} \leq N(\mathfrak{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} < N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}(1+\eta)}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathfrak{p}_i) \\
 &= w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) \\
 &+ O \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \exp \left(-c\sqrt{\log x^\tau} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

En utilisant les hypothèses faites sur $\mathcal{R}(\mathbf{m})$, les formules (7.19), (7.20) et (6.14) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathbf{m}} \left| \sum_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m})) \left(w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) \right| \\
 & \ll \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i})v_1 \cdots v_n} \exp \left(-c\sqrt{\log x^\tau} \right).
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Supposons que $n \neq 1$. En utilisant le théorème des accroissements finis et le lemme 7.3, on remarque que

$$\begin{aligned}
 & w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) \\
 &= \frac{c(N_1, N_2)\eta q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \left(w' \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) + O \left(\eta(\xi \log x)^{n-2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Au vu de (7.16), (7.21), (7.22) et (6.14), il s'ensuit que

$$\sum_{\mathbf{m}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) - \eta c(N_1, N_2)q^3x^3 \frac{\Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v})}{N(\mathfrak{i})} \right| \ll \frac{\eta^2 c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i})v_1 \cdots v_n}.$$

Supposons à présent que $n = 1$. La dérivée à droite w' étant la fonction caractéristique de $[x^{v_1\xi}, x^{(v_1+1)\xi}]$, on en déduit que l'estimation

$$w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}(1+\eta) \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) = \eta \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} w' \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right)$$

est valide sauf éventuellement pour les idéaux vérifiant $\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} < x^{v\xi} \leq \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}$ avec $v = v_1$ ou $v_1 + 1$, auquel cas on dispose de la borne triviale

$$w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}(1+\eta) \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) \ll \eta \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathbf{m}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), v_1) - \eta c(N_1, N_2)q^3x^3 \frac{\Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), v_1)}{N(\mathfrak{i})} \right| \\
 & \ll \frac{\eta c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i})v_1\xi \log x} \sum_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2}^{(\mathfrak{i})} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} + \frac{c(N_1, N_2)q^3x^3}{N(\mathfrak{i})v_1} \exp(-c\sqrt{\log x^\tau})
 \end{aligned}$$

où la sommation $\sum^{(i)}$ porte sur les idéaux \mathfrak{r}_1 et \mathfrak{r}_2 satisfaisant

$$\frac{c(N_1, N_2)q^3x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})} \leq N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) \leq \frac{c(N_1, N_2)q^3x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})}(1+\eta)$$

avec $v = v_1$ ou $v_1 + 1$. En utilisant le fait que $\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}^-(X^\tau)) \ll e^{O(\tau^{-1})}$ dès que $N(\mathfrak{j}) \ll x^4$ ainsi que l'estimation suivante, valide pour $y > x$ et conséquence du théorème 3.7,

$$\sum_{y \leq N(\mathfrak{i}) \leq y(1+\eta)} \frac{1}{N(\mathfrak{j})} \ll \eta,$$

on en déduit finalement (7.17). \square

L'argument de la preuve précédente ne permet pas d'estimer l'analogue de (7.19) lorsque $\mathcal{D} = \mathcal{A}$, à savoir

$$\sum_{\substack{x^{v_1\xi} \leq N(\mathfrak{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \vdots \\ x^{v_n\xi} \leq N(\mathfrak{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{A}}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathfrak{p}_i).$$

Le rôle manifeste du phénomène de parité dans une telle somme rend caduque la possibilité de l'étudier directement à partir des estimations de Type I obtenues au paragraphe 3. En vue de lever cette obstruction et de contourner partiellement la dépendance en \mathbf{n} dans la somme précédente, on introduit, en s'inspirant des notations (5.10), (5.11) et (5.12) de [HBM02], les quantités

$$\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i})) := \sum_{\vec{v} \in \ell(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0))$$

où

$$\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) := \sum_{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s} \in \mathcal{A}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) e_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{v}),$$

$$(7.23) \quad e_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{v}) := \frac{w'(N(\mathfrak{s}))}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} \sum_{\substack{\mathfrak{j}|\mathfrak{s} \\ N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})}.$$

Compte tenu de la définition de w et du lemme 7.3, on peut observer que $e_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{v})$ et $d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{v})$ sont

$$(7.24) \quad \begin{cases} \ll \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}) \log x & \text{si } 0 \leq \frac{\log N(\mathfrak{s})}{\xi \log x} - \left(v_1^{(1)} + \cdots + v_{n_1}^{(1)} + v_1^{(2)} + \cdots + v_{n_2}^{(2)} \right) \leq n_1 + n_2, \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une étape importante consiste à montrer que l'erreur introduite en remplaçant $d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{v})$ par $e_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{v})$ est suffisamment petite, ce qui fera l'objet du lemme 7.6. Avant cela, on s'attache à estimer asymptotiquement $\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}))$. Les estimations de Type I combinées à la formule de Perron permettent en particulier de le relier à $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}))$ en suivant essentiellement l'argument développé au paragraphe 8 de [HB01].

Lemme 7.5. *Soit $i \in \{1, \dots, 5\}$. On a, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $v_0 \geq 1$,*

$$\sum_{\substack{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I} \\ x^{v_0} \leq N(\mathbf{i}) < x^{(v_0+1)\xi}}} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| \widehat{S}_e(\mathcal{A}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \sigma_q(F) \eta^2 x^2 \frac{\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \sum_{\vec{v} \in \iota(S^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v}) \right| \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c$$

où $\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}, \vec{v})$ est défini par (7.16).

Démonstration. Dans l'esprit de la preuve du lemme 3.9 de [HB01] et compte tenu du lemme 2.4, on commence par remplacer $w'(N(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2))$ par $w' \left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right)$. Si $n_1 + n_2 \geq 2$, on utilise successivement le lemme 2.4, le lemme 7.3, l'inégalité de Hölder et le lemme 2.2 de sorte que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{i}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \in \mathcal{A}}} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0))}{(\xi \log x)^{n_1+n_2}} \left| w'(N(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2)) - w' \left(\frac{c(N_1, N_2) q^3 x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right) \right| \left| \sum_{\substack{\mathbf{j} | \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \\ N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right| \\ & \ll \frac{\eta^{\frac{1}{4}}}{\xi^2 \log x} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{A}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{j})^5 \\ (7.25) \quad & \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c. \end{aligned}$$

Dans la cas où $n_1 + n_2 = 1$, le lemme 2.4 entraîne que la formule $w'(N(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2)) = w' \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right)$ est vraie excepté lorsque l'on a $N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = c(N_1, N_2) q^3 x^{3-v\xi} (1 + O(\eta^{\frac{1}{4}}))$ pour $v = v_1$ ou $v_1 + 1$. Par suite, on peut reproduire l'argument développé au cours de la preuve du lemme 7.4 conduisant à l'estimation de $\sum^{(i)} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}$ pour en déduire que (7.25) est valable aussi dans ce cas.

Définissons

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) &:= \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0))}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right) \\ &\times \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \# \mathcal{A}_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{j}} \log \frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})}. \end{aligned}$$

Dans la mesure où $N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{j}) \ll x^{2-\tau/2}$, le lemme 3.5 et l'estimation $\alpha_q(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = 1 + O(\frac{1}{\tau x^\tau})$ entraînent l'inégalité

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}} \left| \Sigma_1(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v}) \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right| \\ (7.26) \quad & \ll \frac{x^2}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)}} (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

valable pour tout $B > 0$.

On montre à présent que, pour tout $B > 0$, on a

$$(7.27) \quad \sum_{\mathbf{m}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v})}{N(\mathbf{i})} \left| \zeta_q(2)^{-1} \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) - \sigma_q(F) \sigma_q(\mathbf{i}) \right| \\ \ll \frac{1}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)}} (\log x)^{-B}$$

ce qui conclura la preuve du lemme au vu de (7.18).

Dans cette direction, on commence par écrire

$$(7.28) \quad \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) = \alpha_q(\mathbf{i}) \sum_{m < x^{\tau/2}} \frac{\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, m)}{m} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{m} \right)$$

où $\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, m) = 0$ si $\alpha_q(\mathbf{i}) = 0$ et $\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, \cdot)$ est la fonction multiplicative définie par

$$(7.29) \quad \hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, p^k) = \sum_{N(\mathbf{j})=p^k} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{\alpha_q(\mathbf{i})}$$

sinon. Compte tenu de la décomposition des idéaux premiers dans $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, on observe que, pour tout premier p et $k \geq 4$,

$$(7.30) \quad \hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, p^k) = 0.$$

De plus, si p est un premier q -régulier et $k \geq 1$, la formule (3.24) entraîne que

$$(7.31) \quad \hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, p^k) = \begin{cases} -\frac{\nu_p}{1+p^{-1}} & \text{si } k = 1 \text{ et } p \nmid N(\mathbf{i}), \\ -1 & \text{si } k = 1 \text{ et } p \mid N(\mathbf{i}), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit \mathbf{i} un idéal tel que $\alpha_q(\mathbf{i}) \neq 0$. La formule de Perron (voir le théorème II.2.5 de [Ten08]) permet d'établir (7.27). En effet, au vu de (7.30) et (7.31), la série de Dirichlet $\zeta_{\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, \cdot)}(s)$ définie par

$$\zeta_{\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, \cdot)}(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, n)}{n^s},$$

est telle que $\zeta_{\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}}(s)$ est absolument convergente si $\sigma > \frac{1}{2}$. Par suite, on a

$$(7.32) \quad \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{\alpha_q(\mathbf{i}) N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\frac{1}{\log x} - i\infty}^{\frac{1}{\log x} + i\infty} \zeta_{\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, \cdot)}(s+1) x^{s\tau/2} \frac{ds}{s^2}.$$

Dans la mesure où $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ possède la région sans zéro standard

$$(7.33) \quad \Re(s) \geq 1 - \frac{c}{\log(2 + |\Im(s)|)}$$

pour un certain $c > 0$, dans laquelle on a

$$(7.34) \quad \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-1} \ll \log(1 + |s|),$$

on peut appliquer le théorème des résidus, ce qui conduit à la formule

$$\sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{\alpha_q(\mathbf{i}) N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) = \text{Res} \left(\zeta_{\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, \cdot)}(s+1) x^{s\tau/2} s^{-2} \right)_{s=0} + R_2(\mathbf{i}) \\ = \lambda_{\mathbf{K}}^{-1}(\zeta_{\hat{\gamma}_q(\mathbf{i}, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}})(1) + R(\mathbf{i})$$

où

$$R(\mathbf{i}) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{V}} \zeta_{\gamma_q(\mathbf{i}, \cdot)}(s+1) x^{s\tau/2} \frac{ds}{s^2}$$

et \mathcal{V} est le chemin de sommets $\frac{1}{\log x} - i\infty, \frac{1}{\log x} - iT, -\frac{c}{\log T} - iT, -\frac{c}{\log T} + iT, \frac{1}{\log x} + iT, \frac{1}{\log x} + i\infty$.
où $T = \exp(\sqrt{\log x^{\tau/2}})$. En calculant directement le produit eulérien, on observe que

$$\frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{\zeta_q(2)\lambda_{\mathbf{K}}} (\zeta_{\gamma_q(\mathbf{i}, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}})(1) = \sigma_q(F) \sigma_q(\mathbf{i}).$$

Pour traiter $R(\mathbf{i})$, on remarque à l'aide de (7.29), (3.25) et (7.31) que l'on a, dans la région (7.33),

$$\begin{aligned} \alpha_q(\mathbf{i}) (\zeta_{\gamma_q(\mathbf{i}, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}})(s) &\ll \alpha_q(\mathbf{i}) \prod_{p|qN(\mathbf{i})} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{\Re(s)}}\right)\right) \prod_{p \text{ } q\text{-singulier}} \left(\sum_{k=0}^3 \frac{\gamma_q(\mathbf{i}_p, p^k)}{p^{k\Re(s)}}\right) \\ &\ll (\log x)^c \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^c N(\mathbf{i}_{q-s})^{1/3}. \end{aligned}$$

Il suit alors de (7.34) que

$$\begin{aligned} \alpha_q(\mathbf{i}) R(\mathbf{i}) &\ll \int_{\mathcal{V}} |\zeta_{\gamma_q(\mathbf{i}, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}}(s+1)| |\zeta_{\mathbf{K}}^{-1}(s+1)| L^s \frac{ds}{s^2} \\ &\ll \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^c N(\mathbf{i}_{q-s})^{1/3} \exp\left(-c\sqrt{\log x^{\tau/2}}\right). \end{aligned}$$

En sommant sur \mathbf{i} , on obtient alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathbf{i}) \ll x^2} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} R(\mathbf{i}) &\ll \exp\left(-c\sqrt{\log x^{\tau/2}}\right) \sum_{\substack{N(\mathbf{i}_1) \ll x^2 \\ \mathbf{i}_1 \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}_1)^c}{N(\mathbf{i}_1)} \sum_{\mathbf{i}_2 \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}_2)^c}{N(\mathbf{i}_2)^{2/3}} \\ (7.35) \quad &\ll \exp\left(-c\sqrt{\log x^{\tau/2}}\right) \end{aligned}$$

ce qui établit (7.27). □

L'estimation du terme d'erreur qui apparaît avec le remplacement de $d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{\mathbf{v}})$ par $e_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{\mathbf{v}})$ a constitué le tour de force majeur des travaux de Heath-Brown et Moroz (voir notamment les paragraphes 8 et 10 à 12 de [HB01], les paragraphes 6 et 7 de [HBM02] et les paragraphes 4 et 5 de [HBM04]). De telles estimations, dites de Type II, constituent l'ingrédient nécessaire pour s'affranchir du phénomène de parité.

Lemme 7.6. *Soient $B \geq 0$, C une classe d'idéaux, $h_1 : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{C}$ et $b : \mathcal{J}(\mathbf{K})^2 \rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions à valeurs dans le disque unité. On a, uniformément en $x \geq 2$, $x^{1+\tau} \leq V \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}$ et $\xi \leq \tau$,*

$$S_V := \sum_{\substack{\mathbf{s} \in C \cap \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathbf{i}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \in \mathcal{A} \\ V < N(\mathbf{s}) \leq 2V}} h_1(\mathbf{i}) b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) (d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{\mathbf{v}}) - e_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{\mathbf{v}})) \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

où la constante implicite dépend du zéro de Siegel et de la classe C .

Démonstration. D'après la discussion algébrique du paragraphe 2 et le théorème des facteurs invariants, il existe des entiers $z_1, z_2 \geq 1$ et une base entière (w_1, w_2, w_3) de $\text{Cl}(\delta^{-1})$ tels que $z_1|z_2$ et $(z_1 w_1 \delta, z_2 w_2 \delta)$ soit une base entière de $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$. Au vu de la formule (2.1), on peut

supposer sans perte de généralité que $z_1 = 1$. En considérant le changement de base ainsi induit, le problème général se réduit à considérer les valeurs

$$\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}((a'_1 + n'_1 q)w_1 \delta + (a'_2 + n'_2 q)z_2 w_2 \delta))}{N(\mathfrak{d})}$$

avec $(a'_1, a'_2, q) = 1$ sous les conditions $(n'_1, n'_2) \in \mathcal{K}' \cdot X$ où \mathcal{K}' est de même nature que \mathcal{K} et $(a'_1 + n'_1 q, a'_2 + n'_2 q) = 1$. En scindant la région en n'_1 en classes de congruences modulo z_2 , on se ramène ainsi à étudier

$$\frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}((a''_1 + n'_1 q z_2)w_1 \delta + (a'_2 z_2 + n'_2 q z_2)w_2 \delta))}{N(\mathfrak{d})}.$$

Par un argument de convolution, on peut finalement supposer que $(a''_1 + n'_1 q z_2, a'_2 z_2 + n'_2 q z_2) = 1$. En résumé, on peut supposer sans perte de généralité que F est défini par (2.1) et qu'il existe une base entière (w_1, w_2, w_3) de $\text{Cl}(\delta^{-1})$ telle que $w_i \delta = \omega_i$ pour $i = 1, 2$.

Grâce à ces réductions et en utilisant la définition de (w_1, w_2, w_3) , on remarque que l'existence d'un premier p tel que $p\mathcal{O}_{\mathbf{K}}|(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)\mathfrak{d}^{-1}$ entraînerait que $p|(n_1, n_2)$. Par suite, on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ où \mathcal{P} désigne l'ensemble des idéaux primitifs, à savoir

$$\mathcal{P} := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : p\mathcal{O}_{\mathbf{K}} \nmid \mathfrak{j} \text{ pour tout } p \text{ premier}\}.$$

En vue de s'affranchir de la condition de coprimauté dans la définition de \mathcal{A} , on peut écrire par le principe d'inclusion-exclusion

$$\begin{aligned} S_V &= \sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{P}}} h_1(\mathfrak{i}) b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A}}} f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) \\ &= \sum_{m \geq 1} \mu(m) S_V(m) \end{aligned}$$

où

$$(7.36) \quad f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) := d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) - e_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}),$$

$$S_V(m) := \sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{P}}} h_1(\mathfrak{i}) b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$$

et

$$\mathcal{A}(m) = \{((a_1 + n_1 q)\omega_1 + (a_2 + n_2 q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} : (n_1, n_2) \in \mathcal{C}(N_1, N_2) : m|(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q)\}.$$

Soit $M \geq 1$ un paramètre qui sera explicité plus tard. Au vu de (7.24), du lemme 2.2 et de la borne sur b et h , on peut estimer la contribution des entiers $m > M$ en s'inspirant de la majoration (11.2) de [HB01] par

$$(7.37) \quad \sum_{m > M} \left| \sum_{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{i} \in \mathcal{P}} h_1(\mathfrak{i}) b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{i} \mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) \right| \leq \log x \sum_{m > M} \sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}(m)} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})^4 \\ \ll \frac{x^2}{M} (\log x)^c.$$

Pour traiter les entiers $m \leq M$, on suit essentiellement la démarche développée dans la preuve du lemme 3.10 de [HB01], de la proposition 6.1 de [HBM02] ainsi que de la proposition 4.2 de [HBM04]. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on observe tout d'abord que

$$\begin{aligned} S_V(m) &\leq \left(\sum_{N(\mathfrak{j}) \ll \frac{q^3 x^3}{V}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})^4 \right)^{\frac{1}{2}} S_V^{(0)}(m)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \left(\frac{x^3}{V} \right)^{\frac{1}{2}} S_V^{(0)}(m)^{\frac{1}{2}} (\log x)^c \end{aligned}$$

où

$$S_V^{(0)}(m) := \sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{P}} \left| \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathfrak{j}\mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) \right|^2.$$

En développant le carré et en isolant les termes diagonaux, on peut écrire la décomposition $S_V^{(0)}(m) = S_V^{(1)}(m) + S_V^{(2)}(m)$ avec

$$\begin{aligned} S_V^{(1)}(m) &:= \sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathfrak{j}\mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})^2, \\ S_V^{(2)}(m) &:= \sum_{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{P} \cap C} f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1, \vec{\mathfrak{v}}) f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_2, \vec{\mathfrak{v}}) \delta_{V,m}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) \end{aligned}$$

et

$$\delta_{V,m}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) := \begin{cases} \# \{ \mathfrak{j} : \mathfrak{j}\mathfrak{s}_1, \mathfrak{j}\mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A}(m) \} & \text{si } V < N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2) \leq 2V \text{ et } \mathfrak{s}_1 \neq \mathfrak{s}_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant (7.24) et le lemme 2.2, on a la majoration de $S_V^{(1)}(m)$ suivante

$$(7.38) \quad S_V^{(1)}(m) \ll (\log x)^2 \tau(m)^c \sum_{n_1, n_2 \ll \frac{qX}{m}} \tau_{\mathbf{K}}(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)^3 \ll \frac{\tau(m)^c}{m^2} x^2 (\log x)^c.$$

Une difficulté essentielle qui apparaît dans l'estimation d'une telle quantité réside dans le caractère épars de $\mathcal{A}(m)$. Une idée originale développée par Heath-Brown et Moroz consiste à réécrire $\delta_{V,m}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ en utilisant le fait que $\mathcal{A}(m)$ est inclus dans un sous-module de $\text{Cl}(\delta^{-1})$ de rang 2.

Pour chaque idéal \mathfrak{s} , on considère le représentant de \mathfrak{s} introduit dans [HBM02], à savoir l'unique entier algébrique $\beta(\mathfrak{s})$ de $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ associé à \mathfrak{s} par l'isomorphisme $\mathcal{I}(\mathbf{K})/\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^* \simeq G(K)$ étudié dans le paragraphe 2 et satisfaisant en outre, si $r(\mathbf{K}) = 1$,

$$(7.39) \quad |\beta(\mathfrak{s})| = N(\beta(\mathfrak{s}))^{\frac{1}{3}} \varepsilon_1^z \text{ où } z \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

et, si $r(\mathbf{K}) = 3$,

$$(7.40) \quad |\sigma_j(\beta(\mathfrak{s}))| = N(\beta(\mathfrak{s}))^{\frac{1}{3}} |\sigma_j(\varepsilon_1)|^{z_1} |\sigma_j(\varepsilon_2)|^{z_2} \text{ où } z_1, z_2 \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \text{ et } j \in \{1, 2, 3\},$$

ε_1 et ε_2 désignant les unités fondamentales introduites dans le paragraphe 2.

L'application trace Tr facilite la détection de la condition $\mathbf{j}\mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)$. En effet, étant donné la définition (2.2) de la base duale $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$, l'idéal $\mathbf{j}\mathfrak{s}$ est de la forme $(n_1 w_1 + n_2 w_2)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathcal{I}(\mathbf{K})$ tel que $(\alpha) = \mathbf{j}$ et

$$(7.41) \quad \text{Tr}(\alpha \beta(\mathfrak{s}) \tilde{w}_3) = 0.$$

On fixe une base (v_1, v_2, v_3) de $(C \text{Cl}(\delta))^{-1}$. Si $\alpha = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ pour des entiers α_1, α_2 et α_3 , alors l'identité (7.41) est équivalente à la relation linéaire

$$(7.42) \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j \text{Tr}(v_j \beta(\mathfrak{s}) \tilde{w}_3) = 0.$$

Étant donné deux idéaux \mathfrak{s}_1 et \mathfrak{s}_2 , on pose $\beta_i = \beta(\mathfrak{s}_i)$ pour $i = 1, 2$ et on introduit le système de coordonnées

$$\widehat{\beta}_i := (\text{Tr}(v_1 \beta_i \tilde{w}_3), \text{Tr}(v_2 \beta_i \tilde{w}_3), \text{Tr}(v_3 \beta_i \tilde{w}_3)) \quad \text{et} \quad \widehat{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Supposons que $\mathbf{j}\mathfrak{s}_i = ((a_1 + n_1^{(i)} q) \omega_1 + (a_2 + n_2^{(i)} q) \omega_2) \mathfrak{d}^{-1}$ pour $i = 1, 2$. En écrivant les équations (7.42) associées à \mathfrak{s}_1 et \mathfrak{s}_2 , on obtient un système linéaire de rang 2 (puisque $\mathfrak{s}_1 \neq \mathfrak{s}_2$) dont la résolution permet d'exprimer α en fonction de β_1 et β_2 , compte tenu de la primitivité de α . On a ainsi

$$(7.43) \quad \widehat{\alpha} = \pm \frac{\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}{D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)}$$

où $D(b_1, b_2, b_3) = \text{p.g.c.d}(b_1, b_2, b_3)$. On peut alors retrouver la condition $m | (a_1 + n_1^{(i)} q, a_2 + n_2^{(i)} q)$ en remarquant que (7.43) implique que

$$a_j + n_j^{(i)} q = \left| D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)^{-1} h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \right|$$

où h_{ij} désigne la forme cubique à coefficients rationnels définie par la formule (6.4) de [HBM02], à savoir

$$(7.44) \quad h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) := \text{Tr} \left(\beta_i \sum_{k=1}^3 (\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)_k v_k \tilde{w}_j \right).$$

Au vu de ces préliminaires, on dispose des analogues des formules (11.5), (11.6) et (11.7) de [HB01], à savoir

$$(7.45) \quad |\widehat{\beta}_1|, |\widehat{\beta}_2| \asymp V^{\frac{1}{3}}, \quad |\widehat{\alpha}| \asymp qx V^{-\frac{1}{3}} \text{ et } D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \ll Vx^{-1}.$$

On étend finalement la définition de $f_{\mathbf{n}}(\cdot, \vec{\mathfrak{v}})$ et $\delta_{V,m}$ aux entiers algébriques de $\mathcal{I}(\mathbf{K})$ en posant

$$f_{\mathbf{n}}(\beta, \vec{\mathfrak{v}}) := \begin{cases} f_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) & \text{si } S \text{ est primitif et } \beta(\mathfrak{s}) = \beta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) := \begin{cases} \delta_{V,m}(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) & \text{si } \beta_i = \beta(\mathfrak{s}_i) \text{ pour } i = 1, 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on définit la norme N sur \mathbf{R}^3 comme le polynôme dont les valeurs en $\vec{b} \in \mathbf{Q}^3$ satisfont $N(\vec{b}) = N(\beta(\vec{b}))$ où $\beta(\vec{b})$ désigne l'entier algébrique de C satisfaisant $\widehat{\beta(\vec{b})} = \vec{b}$.

Soit y un paramètre qui sera explicité plus tard tel que $q^{\frac{1}{2}} \leq y \ll x^{\frac{2}{3}}$. La contribution des vecteurs satisfaisant $D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \leq Vx^{-1}y^{-1}$ peut être traitée par un argument de découpage d'une région de \mathbf{R}^3 en cubes suffisamment petits et en classes de congruences (voir le lemme 11.1

de [HB01]). En reproduisant la preuve du lemme 11.2 de [HB01], l'inégalité $f_{\beta_1} f_{\beta_2} \leq (f_{\beta_1}^2 + f_{\beta_2}^2)$ implique l'estimation suivante, analogue de la majoration de S_3 de [HB01], pp. 70–71,

$$\begin{aligned} S_V^{(3)}(m) &:= \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \leq Vx^{-1}y^{-1}}} f_{\mathbf{n}}(\beta_1, \vec{\nu}) f_{\mathbf{n}}(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) \\ &\ll (\log x)^2 \sum_{\substack{\beta_1, \beta_2 \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \leq Vx^{-1}y^{-1}}} \tau_{\mathbf{K}}((\beta_1))^2 \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) \ll Vxy^{-1}(\log x)^c. \end{aligned}$$

L'estimation de la contribution des termes β_1 et β_2 tels que $D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) > Vx^{-1}y^{-1}$ consiste principalement à reprendre les arguments de la preuve du lemme 4.3 et du paragraphe 5 de [HBM04] en tenant compte de la dépendance en m et q , pour obtenir un résultat uniforme en $q \leq (\log x)^A$. On est donc conduit à estimer la quantité

$$S_V^{(4)}(m) := \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) > Vx^{-1}y^{-1}}} f_{\mathbf{n}}(\beta_1, \vec{\nu}) f_{\mathbf{n}}(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2).$$

En découpant la région de sommation de $D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)$ en intervalles $]\Delta, 2\Delta]$ où Δ parcourt des puissances de 2, puis en sous-intervalles $](z-1)Y^{-2}\Delta, zy^{-2}\Delta]$, on observe l'existence de $Vx^{-1}y^{-1} < \Delta \ll Vx^{-1}$ et $y^2 < z \leq 2y^2$ tels que l'on ait

$$S_V^{(4)}(m) \ll S_V^{(5)}(m, z, \Delta) y^2 \log x$$

où

$$S_V^{(5)}(m, z, \Delta) := \sum_{D \in]\frac{z-1}{y^2}\Delta, \frac{z}{y^2}\Delta]} \left| \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ D(\beta_1 \wedge \beta_2) = D}} f_{\mathbf{n}}(\beta_1, \vec{\nu}) f_{\mathbf{n}}(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) \right|.$$

Au vu de ce qui précède, on peut écrire $\delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) = 1_{\mathcal{R}_{D,V}}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \delta_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D)$ où $\mathcal{R}_{D,V}$ est l'ensemble des $(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)$ satisfaisant les contraintes (7.39) (resp. (7.40)) si $r(\mathbf{K}) = 1$ (resp. $r(\mathbf{K}) = 3$) ainsi que les conditions

$$V < N(\widehat{\beta}_1), N(\widehat{\beta}_2) \leq 2V \text{ et } 0 < \left| \frac{h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}{D} \right| - (a_j + qx(1 - N_j\eta)) \leq q\eta x \text{ pour } i, j = 1, 2,$$

tandis que $\delta_{q,m}$ est l'indicatrice définie par

$$\delta_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D) = \begin{cases} 1 & \text{si } mD|h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \text{ et } D^{-1}|h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)| = a_j \pmod{q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Au regard de (7.45), on recouvre $\mathcal{R}_{D,V}$ en domaines du type $\mathfrak{C} := \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ où \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 sont des cubes de la forme

$$(7.46) \quad \prod_{j=1}^3 \left[V^{1/3} \frac{n_j - 1}{y^2}, V^{1/3} \frac{n_j}{y^2} \right] \quad \text{avec } n_1, n_2, n_3 \ll y^2.$$

Considérons les \mathfrak{C} intersectant la frontière de la région $\mathcal{R}_{D,V}$ (dits de classe II dans les travaux de Heath-Brown et Moroz) ou dans lesquels h_{ij} change de signe.

Lorsque $r(\mathbf{K}) = 1$, on réitère l'argument de comptage de points sur une hypersurface développé dans le paragraphe 12 de [HB01] et le paragraphe 6 de [HBM02]. Pour éclaircir l'exposé, on

s'attarde aux cubes $\mathfrak{C}_1(n_1, n_2, n_3) \times \mathfrak{C}_2(n_4, n_5, n_6)$ sus-cités qui possèdent un point ne vérifiant pas l'inégalité

$$0 \leq \left| \frac{h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}{D} \right| - (a_j + qx(1 - N_j\eta)).$$

pour un $D \in](z-1)y^{-2}\Delta, zy^{-2}\Delta]$. Puisque $D = zy^{-2}\Delta + O(y^{-2}\Delta)$, il s'ensuit que, pour les cubes considérés, on a

$$h_{ij}(n_1, \dots, n_6) = \Delta y^6 V^{-1}(a_j + qx(1 - N_j\eta)) + O(qy^4)$$

et $\nabla h(n_1, \dots, n_6) \gg y^4$. En appliquant alors le lemme 4.9 de [HB01] avec les choix $S_0 = q$ et $R = R_0 = y^2$ et en utilisant l'hypothèse $q \leq y^2$, on en déduit qu'il y a $O(y^{10}q^{-5})$ hypercubes de côté q contenant de tels (n_1, \dots, n_6) . Par suite, il y a $O(qy^{10})$ cubes $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ intersectant la frontière de $\mathcal{R}_{D,V}$ ou sur lesquels h_{ij} changent de signe.

Le cas $r(\mathbf{K}) = 3$ est traité de la même manière, à l'exception de l'inégalité (7.40). Comme il est indiqué p. 282 de [HBM02], le problème peut alors se ramener à compter les cubes \mathfrak{C} contenant des couples $(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)$ satisfaisant une équation du type

$$A \log |\sigma_1(\beta_i)| + B \log |\sigma_2(\beta_i)| + C \log |\sigma_3(\beta_i)| = 0 \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

pour des réels A, B et C .

En utilisant (7.24) et le lemme 11.1 de [HB01] pour majorer la contribution des cubes précédemment étudiés, on en déduit qu'il existe deux cubes \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 de la forme (7.46) tels que $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ soit inclus dans $\mathcal{R}_{D,V}$ pour tout $D \in](z-1)y^{-2}\Delta, zy^{-2}\Delta]$, h_{ij} soit de signe constant (disons positif) sur $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ et

$$S_V^{(5)}(m, z, \Delta) \ll Vxy^{-3}(\log x)^c + y^{12}S_V^{(6)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$$

où

$$S_V^{(6)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) := \sum_{D \in]\frac{z-1}{y^2}\Delta, \frac{z}{y^2}\Delta]} \left| \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2 \in \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \\ D(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) = D}} f_{\mathbf{n}}(\beta_1, \vec{\nu}) f_{\mathbf{n}}(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D) \right|.$$

Par convolution, on peut réécrire $S_V^{(6)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$ sous la forme

$$\begin{aligned} & S_V^{(6)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \\ &= \sum_{D \in]\frac{z-1}{y^2}\Delta, \frac{z}{y^2}\Delta]} \left| \sum_{d \geq 1} \mu(d) \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2 \in \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \\ dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}} f_{\mathbf{n}}(\beta_1, \vec{\nu}) f_{\mathbf{n}}(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D) \right|. \end{aligned}$$

Dans le paragraphe 12 de [HB01] et p. 282 de [HBM02], Heath-Brown et Moroz développent un argument de réseau qui permet d'estimer la contribution des entiers satisfaisant $dD > d_0$ où

$d_0 = y^{15}Vx^{-1} + V^{\frac{1}{6}}$. Ils obtiennent en particulier l'estimation

$$\sum_{D \in \left] \frac{z-1}{y^2} \Delta, \frac{z}{y^2} \Delta \right]} \sum_{dD \geq d_0} \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \\ \beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \\ dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}} |f_{\mathbf{n}}(\beta_1, \vec{\nu}) f_{\mathbf{n}}(\beta_2, \vec{\nu})| \ll Vxy^{-15}(\log x)^c.$$

On en déduit donc que

$$S_V^{(6)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \ll Vxy^{-15}(\log x)^c + S_V^{(7)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$$

où $S_V^{(7)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$ est la somme définie par

$$\sum_{D \in \left] \frac{z-1}{y^2} \Delta, \frac{z}{y^2} \Delta \right]} \left| \sum_{dD \leq d_0} \mu(d) \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2 \in \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \\ dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}} f_{\mathbf{n}}(\beta_1, \vec{\nu}) f_{\mathbf{n}}(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{q,m}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, D) \right|.$$

Soit d^* le dénominateur commun des h_{ij} . On peut écrire $h_{ij} = (d^*)^{-1}H_{ij}$ où H_{ij} est une forme cubique à coefficients entiers qui satisfait $H_{ij}(\widehat{\beta}, \lambda\widehat{\beta}) = 0$ au vu de la définition (7.44). En introduisant des caractères additifs, on peut reformuler, en vue de l'utilisation d'une inégalité de grand crible, les congruences définissant $\delta_{q,m}(\cdot, \cdot)$ ainsi que la condition $dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2$. On obtient ainsi l'analogie de la formule (5.2) de [HBM04] suivante

$$S_V^{(7)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = \sum_{D \in \left] \frac{z-1}{y^2} \Delta, \frac{z}{y^2} \Delta \right]} \left| \sum_{dD \leq d_0} \mu(d) S^{(8)}(m, d, D, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \right|,$$

où

$$\begin{aligned} S^{(8)}(m, d, D, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) &:= \frac{1}{(d^* q m d D)^6} \sum_{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2 \in (\mathbf{Z}/(d^* q m d D)\mathbf{Z})^3}^* e \left(-\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{\eta}_1 + \vec{b}_2 \cdot \vec{\eta}_2}{d^* q m d D} \right) \\ &\quad \times S(d^* q m d D, \vec{b}_1, \mathfrak{C}_1) S(d^* q m d D, \vec{b}_2, \mathfrak{C}_2) \end{aligned}$$

où \sum^* indique que la sommation porte sur les vecteurs $\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2$ primitifs satisfaisant

$$dD | \widehat{\eta}_1 \wedge \widehat{\eta}_2, \quad H_{ij}(\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) \equiv Dd^* a_i \pmod{qDd^*} \text{ et } H_{ij}(\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) \equiv 0 \pmod{mDd^*},$$

et

$$S(l, \vec{b}, \mathfrak{C}) = \sum_{\substack{\widehat{\beta} \in \mathfrak{C} \cap \mathbf{Z}^3 \\ (\beta) \in \mathcal{P} \cap C}} e \left(\frac{\vec{b} \cdot \widehat{\beta}}{l} \right) f_{\mathbf{n}}(\beta, \vec{\nu}).$$

On remarque alors que la condition $dD | \widehat{\eta}_1 \wedge \widehat{\eta}_2$ est équivalente à l'existence de $1 \leq \lambda \leq dD$ tel que $\widehat{\eta}_2 \equiv \lambda \widehat{\eta}_1 \pmod{dD}$ et $(\lambda, dD) = 1$ en raison de la primitivité de $\widehat{\eta}_1$ et $\widehat{\eta}_2$. En écrivant $\widehat{\eta}_2 = \lambda \widehat{\eta}_1 + dD \widehat{\eta}_3$ et $\widehat{\eta}_1 = \widehat{\eta}_4 + d^* q m \widehat{\eta}_5$, on remarque que $\widehat{\eta}_3$ et $\widehat{\eta}_4$ sont solutions des congruences

$$\begin{cases} H_{ij}(\widehat{\eta}_4, \lambda \widehat{\eta}_4 + dD \widehat{\eta}_3) \equiv Dd^* a_i \pmod{qDd^*}, \\ H_{ij}(\widehat{\eta}_4, \lambda \widehat{\eta}_4 + dD \widehat{\eta}_3) \equiv 0 \pmod{mDd^*}. \end{cases}$$

En effet, d'après la formule de Taylor, il existe un polynôme \widetilde{H}_{ij} tel que

$$H_{ij}(\widehat{\eta}_1, \lambda \widehat{\eta}_1 + dD \widehat{\eta}_3) = H_{ij}(\widehat{\eta}_1, \lambda \widehat{\eta}_1) + dD \widetilde{H}_{ij}(\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_3, \lambda, d, D).$$

Au vu de la définition (7.44), $H_{ij}(\widehat{\eta}_1, \lambda \widehat{\eta}_1) = 0$ ce qui entraîne que

$$\begin{cases} H_{ij}(\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) \equiv Dd^*a_i \pmod{qDd^*}, \\ H_{ij}(\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) \equiv 0 \pmod{mDd^*} \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} d\widetilde{H}_{ij}(\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_3, \lambda, d, D) \equiv d^*a_i \pmod{qd^*}, \\ d\widetilde{H}_{ij}(\widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_3, \lambda, d, D) \equiv 0 \pmod{md^*}. \end{cases}$$

Ce dernier système ne dépendant que des classes de $\widehat{\eta}_1$ et $\widehat{\eta}_3$ modulo mqd^* , on en déduit qu'il est équivalent à

$$\begin{cases} d\widetilde{H}_{ij}(\widehat{\eta}_4, \widehat{\eta}_3, \lambda, d, D) \equiv d^*a_i \pmod{qd^*}, \\ d\widetilde{H}_{ij}(\widehat{\eta}_4, \widehat{\eta}_3, \lambda, d, D) \equiv 0 \pmod{md^*}. \end{cases}$$

En effectuant le raisonnement en sens inverse, il s'ensuit finalement que le système est équivalent à

$$\begin{cases} H_{ij}(\widehat{\eta}_4, \lambda \widehat{\eta}_4 + dD\widehat{\eta}_3) \equiv Dd^*a_i \pmod{qDd^*}, \\ H_{ij}(\widehat{\eta}_4, \lambda \widehat{\eta}_4 + dD\widehat{\eta}_3) \equiv 0 \pmod{mDd^*}. \end{cases}$$

Dans la mesure où la somme définissant $S(l, \vec{b}, \mathfrak{C})$ porte sur les vecteurs $\widehat{\beta}$ primitifs, la propriété d'orthogonalité des caractères additifs entraîne que, si $\widehat{\eta}$ n'est pas primitif, alors

$$\sum_{\vec{b} \in (\mathbf{Z}/(d^*qmdD)\mathbf{Z})^3} e\left(-\frac{\vec{b} \cdot \widehat{\eta}}{d^*qmdD}\right) S(d^*qmdD, \vec{b}, \mathfrak{C}) = 0.$$

Au vu de ce qui précède, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} S^{(8)}(m, d, D, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) &:= \frac{1}{(d^*qmdD)^6} \sum_{\substack{\lambda \in (\mathbf{Z}/(dD)\mathbf{Z})^* \\ \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in (\mathbf{Z}/(d^*qmdD)\mathbf{Z})^3}} T\left(\lambda, \vec{b}_1, \vec{b}_2\right) \\ &\quad \times S(d^*qmdD, \vec{b}_1, \mathfrak{C}_1) S(d^*qmdD, \vec{b}_2, \mathfrak{C}_2) \end{aligned}$$

où

$$T\left(\lambda, \vec{b}_1, \vec{b}_2\right) := \sum_{\widehat{\eta}_3, \widehat{\eta}_4, \widehat{\eta}_5} e\left(-\frac{(\vec{b}_1 + \lambda \vec{b}_2) \cdot \widehat{\eta}_5}{dD}\right) e\left(-\frac{(\vec{b}_1 + \lambda \vec{b}_2) \cdot \widehat{\eta}_4 + dD\vec{b}_2 \cdot \widehat{\eta}_3}{d^*qmdD}\right)$$

où $\widehat{\eta}_3, \widehat{\eta}_4 \in \mathbf{Z}/(d^*qm)\mathbf{Z}$ et $\widehat{\eta}_5 \in \mathbf{Z}/(dD)\mathbf{Z}$ satisfont

$$Dd^*a_i \equiv H_{ij}(\widehat{\eta}_4, \lambda \widehat{\eta}_4 + dD\widehat{\eta}_3) \pmod{qDd^*} \text{ et } H_{ij}(\widehat{\eta}_4, \lambda \widehat{\eta}_4 + dD\widehat{\eta}_3) \equiv 0 \pmod{mDd^*}.$$

La propriété d'orthogonalité des caractères additifs et la majoration triviale entraînent que

$$\left|T\left(\lambda, \vec{b}_1, \vec{b}_2\right)\right| \leq \begin{cases} (dD)^3(d^*qm)^6 & \text{si } \vec{b}_1 + \lambda \vec{b}_2 \equiv 0 \pmod{dD}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $T\left(\lambda, \vec{b}_1, \vec{b}_2\right) \neq 0$, alors \vec{b}_2 est déterminé de manière unique modulo dD par la donnée de λ et \vec{b}_1 . L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne donc l'estimation

$$\left|S^{(8)}(m, d, D, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)\right| \ll \frac{(qm)^3}{(dD)^2} \max_{i=1,2} \sum_{\vec{b} \pmod{d^*qmdD}} \left|S(d^*qmdD, \vec{b}, \mathfrak{C}_i)\right|^2.$$

Afin d'appliquer une inégalité de grand crible, on réduit les phases $\vec{b} (d^* qmdD)^{-1}$ à des phases irréductibles $\vec{b} l^{-1}$, c'est-à-dire telle que $(l, b_1, b_2, b_3) = 1$. On remarque pour cela qu'une phase irréductible $\vec{b} l^{-1}$ apparaît avec un poids qui peut être majoré par

$$\sum_{D \geq V x^{-1} y^{-1}} \sum_{\substack{d \\ l | d^* qmdD}} \frac{(qm)^3}{(dD)^2} \ll (qm)^5 \sum_{\substack{v \geq V x^{-1} y^{-1} \\ l | v}} \frac{\tau(v)}{v^2} \ll (qm)^5 \frac{\tau(l)}{l} xy \frac{\log V}{V}.$$

On en déduit que

$$S_V^{(7)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \ll \frac{m^5 XY (\log x)^c}{V} \max_{i=1,2} \sum_{l \leq mq d^* d_0} \frac{\tau(l)}{l} \sum_{\substack{\vec{b} \\ \text{mod } l}}^{(l)} \left| S(l, \vec{b}, \mathfrak{C}_i) \right|^2$$

où la sommation $\sum^{(l)}$ porte sur les vecteurs \vec{b} tels que $(l, b_1, b_2, b_3) = 1$.

On peut alors reproduire étapes par étapes les arguments du paragraphe 13 de [HB01]. Il s'ensuit l'estimation

$$S_V^{(7)}(m, z, \Delta, \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \ll m^5 x V \left(y Q_1^4 \exp \left(-c \sqrt{\log L} \right) + y Q_1^{-1/4} + m^3 y^{46} x^{-\tau/2} \right) (\log x)^c$$

où $Q_1 := (\log x)^{c_1}$ avec $c_1 > 0$ une constante qui peut-être choisie arbitrairement grande. Par suite, en collectant les différents termes d'erreur, il vient que

$$S_V(m) \ll x^2 \left(y^{-\frac{1}{2}} + m^{5/2} y^{15/2} \left(Q_1^2 \exp \left(-c \sqrt{\log L} \right) + Q_1^{-1/8} \right) + m^4 y^{30} x^{-\tau/4} \right) (\log x)^c$$

et donc

$$S_V \ll x^2 \left(M^{-1} + M y^{-\frac{1}{2}} + M^{7/2} y^{15/2} \left(Q_1^2 \exp \left(-c \sqrt{\log L} \right) + Q_1^{-1/8} \right) + M^5 y^{30} x^{-\tau/4} \right) (\log x)^c.$$

Quitte à supposer la constante c_1 introduite dans la définition de Q_1 suffisamment grande, les choix $y = M^4$ et $M = Q_1^{1/276}$ assurent que $q^{\frac{1}{2}} \leq y$ et impliquent finalement que

$$S_V \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

L'uniformité du résultat en $(\log x)^{-\varpi_2} \leq \xi \leq \tau$ ainsi que la non-effectivité de la constante implicite sont des conséquences directes de la preuve du lemme 3.8 de [HB01]. \square

En conclusion de cette partie, on peut énoncer une borne supérieure du terme d'erreur $S(|h|)$ défini par (5.24) sous l'hypothèse $|h| \leq 1$.

Proposition 7.7. *Soit $B > 0$. Supposons que $|h| \leq 1$. Il existe une constante $c(B) > 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(\log x)^{-\tau} \leq \xi \leq \tau$, $\eta = (\log x)^{-c(B)}$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on ait*

$$S(|h|) \ll \eta^2 x^2 (\log x)^{-B} + \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

où les $R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ sont définis par (7.5).

Démonstration. Soit $c_1 > 0$. Puisqu'il y a au plus $O(\xi^{-1})$ choix possibles pour chaque v_i , les lemmes 7.4, 7.5 et 7.6 entraînent l'existence d'une constante $c > 0$ indépendante de c_1 et η telle

que, pour $i \in \{1, \dots, 5\}$,

$$\sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right| \\ \ll_{c_1} x^2 \left(\eta^{\frac{11}{5}} + \xi^{-c\tau-1} (\log x)^{-c_1} \right) (\log x)^c.$$

En remarquant que la condition $(\log x)^{-\tau} \leq \xi \leq \tau$ entraîne que $\xi^{-c\tau-1} \leq (\log x)^c$, on en déduit l'existence de $c_2 > 0$ tel que

$$\sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right| \\ \ll_{c_1} x^2 \left(\eta^{\frac{17}{8}} + (\log x)^{-c_1} \right) (\log x)^{c_2}.$$

En choisissant $c(B) = 8(c_2 + B)$ et $c_1 = 17(c_2 + B)$ et en utilisant la formule

$$S(|h|) \leq \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right| \\ + \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}),$$

on en déduit le résultat. \square

8. APPLICATIONS

8.1. Application aux fonctions de $\mathcal{M}(z)$: preuve du théorème 1.1.

Démonstration. On pose $\tau = (\log_2 x)^{\varepsilon/2-1}$ et $\tau_1 = (\log_2 x)^{\varepsilon-1}$. La multiplicativité de h implique qu'une décomposition de la forme (5.6) existe puisque l'on peut écrire $h(m) = h(m^-(x^\tau)) z^k$ pour les entiers m tels que $m^+(x^\tau)$ soit sans facteur carré et $\omega(m^+(x^\tau)) = k$. On peut donc utiliser le corollaire 5.3. Dans la mesure où la somme définissant $\Delta(|h|)$ est vide (il n'y a pas de $E_j(k)$), on en déduit que l'on a, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, la formule

$$S(\mathcal{A}; h) = \frac{\eta \sigma_q(F)}{c(N_1, N_2) q^3 x} S(\mathcal{B}; \sigma_q h) + O(\tau_1 \eta^2 x^2).$$

La proposition 4.1 permet d'approcher $S(\mathcal{B}; \sigma_q h)$. Dans la mesure où $\omega(q) \ll \frac{\log_2 x}{\log_3 x}$, il vient

$$S(\mathcal{B}; \sigma_q h) = c(N_1, N_2) \eta q^3 x^3 \sigma_q(F) (3 \log x)^{z-1} \left(\frac{\sigma_q(F, h)}{\Gamma(z)} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1-\varepsilon}} \right) \right)$$

Au vu de (2.12), on en déduit le résultat en sommant sur les différents $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et en estimant trivialement la contribution des $(N_1, N_2) \notin \mathcal{N}(\eta)$ à l'aide de (2.8) et (2.8). \square

8.2. Valeurs friables de formes binaires cubiques : preuve du théorème 1.2. Considérant le cas $h = 1_{S(y)}$ où $S(y)$ est l'ensemble des entiers y -friables, on peut écrire la décomposition (5.6) pour les entiers m tels que $\omega(m^+(x^\tau)) = \Omega(m^+(x^\tau)) = k$ sous la forme

$$1_{S(y)}(m) = 1_{E(k)}(m^+(x^\tau)) \quad \text{avec} \quad E(k) := \left\{ m : \omega(m) = \Omega(m) = k \text{ et } P^{(k)}(m) \leq y \right\}$$

dès que $y > x^\tau$.

Concentrons nous dans un premier temps sur la démonstration de (1.11). En appliquant le corollaire 5.3 avec les choix $\tau := (\log_2 x)^{\varepsilon/2-1}$ et $\tau_1 := (\log_2 x)^{\varepsilon-1}$, il suit la formule

$$S(\mathcal{A}; h) - \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}; \sigma_q 1_{S(y)}) \ll \tau_1 \eta^2 x^2 + \Delta(1_{S(y)}).$$

Compte tenu de la définition de $E(k)$ ci-dessus et de la définition 5.33 de $\Delta(1_{S(y)})$, on remarque qu'il n'y a pas de terme $\Delta(k, \mathcal{D}, i, 1_{S(y)})$ qui intervient, dans la mesure où l'inégalité $P^+(m) \leq y$ est de la forme

$$yP^{(\vec{\alpha})}(m) \prec P^{(\vec{\beta})}(m)$$

avec $\beta = \emptyset$, d'où

$$(8.1) \quad S(\mathcal{A}; h) - \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}; \sigma_q 1_{S(y)}) \ll \tau_1 \eta^2 x^2.$$

Dans le domaine (1.12) défini par

$$x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x^{1/2-\varepsilon},$$

on observe que seuls interviennent les ensembles $C^{(5)}(m, n)$ défini par (5.16). Il suit alors de la discussion du paragraphe 5 que l'on a

$$S(\mathcal{A}; 1_{S(y)}) - \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}; \sigma_q 1_{S(y)}) \ll e^{c\tau-1} \Delta_0(x^{2\tau/3}) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + S(|h|).$$

En utilisant les lemmes 6.1, 6.3 et 7.1, il vient respectivement que, pour tout $B > 0$, on a

$$\Delta_0(x^{2\tau/3}) \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

$$\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) \ll \eta^2 x^2 (\log_3 x)^{c_1} \exp\left(-c_2 \frac{\tau_1}{\tau} \log \frac{\tau_1}{\tau}\right)$$

et

$$S(|h|) \ll \xi \tau^{-5} \eta^2 x^2.$$

On pose alors $\tau_1 := \varepsilon/2$, $\tau := (\log_2 x)^{\varepsilon/2-1/2}$ et $\xi := (\log x)^{-\tau}$ conduisant ainsi à la borne supérieure

$$(8.2) \quad S(\mathcal{A}; h) - \frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x} S(\mathcal{B}; \sigma_q 1_{S(y)}) \ll \exp\left(-(\log_2 x)^{1/2-\varepsilon}\right) \eta^2 x^2.$$

Pour achever la preuve du théorème, il convient de déterminer une formule asymptotique de $S(\mathcal{B}; \sigma_q 1_{S(y)})$. Une telle estimation peut-être obtenue en utilisant les résultats de [HTW08] où Hanrot, Tenenbaum et Wu développent une version friable de la méthode de Selberg-Delange.

Proposition 8.1. *Il existe $C > 0$ tel que, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $x \geq 3$ et $\exp((\log_2 x)^{2+\varepsilon}) \leq y \ll q^3 x^3$, on ait*

$$S(\mathcal{B}; \sigma_q 1_{S(y)}) = \frac{1}{\zeta_q(2)\sigma_q(F)} \eta c(N_1, N_2) q^3 x^3 \rho(3u) + O\left(\left(C^{\omega(q)} \log(q+1)^4 + \log_2 x\right) \eta c(N_1, N_2) q^3 x^3 \rho(u) \frac{\log(u+1)}{\log y} + \eta^2 x^3\right)$$

où $u = \frac{\log x}{\log y}$.

Démonstration. Au vu de l'estimation (4.19), on peut appliquer le théorème 1.2 de [HTW08]. Il s'ensuit que, uniformément en $x \geq 3$ et $\exp((\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}) \leq y \leq x$,

$$(8.3) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n) = \Lambda_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(x, y) + O\left(\frac{x\rho(u)}{L_{\varepsilon/3}(y)}\right)$$

où

$$L_{\varepsilon/3}(y) := \exp\left((\log y)^{3/5-\varepsilon/3}\right), \quad \Lambda_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(x, y) := x \int_0^u \rho(u-v) d\left(\frac{M_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(y^v)}{y^v}\right)$$

et

$$M_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(y^v) := \sum_{n \leq y^v} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n).$$

Au vu de la formule (1.19) de [HTW08], on dispose de l'évaluation uniforme en $q \geq 1$ et $t \geq 1$,

$$(8.4) \quad M_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(t) = \lambda_0(\mathbf{1})t \left(1 + O\left(\frac{2^{\omega(q)}}{t^{1/6-\varepsilon}}\right)\right)$$

où $\lambda_0(\mathbf{1})$ est défini par (4.26). En utilisant une intégration par parties, il vient la formule

$$(8.5) \quad \Lambda_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(x, y) = \lambda_0(\mathbf{1})x\rho(u) + x \int_0^u \rho'(u-v) \frac{M_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(y^v) - \lambda_0(\mathbf{1})y^v}{y^v} dv + O\left(2^{\omega(q)}x^{5/6+\varepsilon}\right).$$

Compte tenu de l'estimation uniforme en $0 \leq v \leq u$ suivante

$$\rho'(u-v) \ll \log(u+1)\rho(u) \exp(O(v \log(u+1)))$$

établie dans [[Ten08], p.507], on obtient alors la formule

$$(8.6) \quad \int_0^u \rho'(u-v) \frac{M_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(y^v) - \lambda_0(\mathbf{1})y^v}{y^v} dv \ll 2^{\omega(q)} \frac{\rho(u) \log(u+1)}{\log y}.$$

Le corollaire III.5.14 de [Ten08] impliquant pour tout $j \geq 0$ la majoration valide

$$(8.7) \quad \rho^{(j)}(u+v) - \rho^{(j)}(u) \ll \begin{cases} \text{si } u \leq j \text{ et } \lfloor u \rfloor \neq \lfloor u+v \rfloor, \\ v\rho(u) (\log(u+1))^{j+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $u, v \geq 0$, il s'ensuit que l'on a, dans le domaine $\exp((\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}) \leq y \leq x$,

$$(8.8) \quad \begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\rho'\left(u-v + \frac{\log(1+\eta)}{\log y}\right) - \rho'(u-v) \right) \frac{M_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}(y^v) - \lambda_0(\mathbf{1})y^v}{y^v} dv \\ & \ll 2^{\omega(q)} \frac{\eta}{\log y} (\log(u+1))^2 \int_0^u \frac{\rho(u-v)}{y^{(1/6-\varepsilon)v}} dv + 2^{\omega(q)} \int_{u-1}^{u-1+\frac{\log(1+\eta)}{\log y}} \frac{1}{y^{(1/6-\varepsilon)v}} dv \\ & \ll 2^{\omega(q)} \eta \rho(u) \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} \right)^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit finalement que la formule

$$(8.9) \quad \sum_{\substack{x < n \leq (1+\eta)x \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n) = \lambda_0(\mathbf{1})\eta x \rho(u) \left(1 + O\left(\frac{2^{\omega(q)} \log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

est valide dans le domaine $\exp((\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}) \leq y \leq x$, puis dans le domaine $x \leq y \leq x^2$ au vu de (8.4).

Afin d'évaluer la quantité $S(\mathcal{B}; \sigma_q 1_{S(y)})$, on écrit la convolution suivante, qui est l'analogue de (4.32),

$$(8.10) \quad \sum_{\substack{x < n \leq (1+\eta)x \\ P^+(n) \leq y}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) = \sum_{\substack{d \leq x(1+\eta) \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \sum_{\substack{x/d < n \leq (1+\eta)x/d \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n).$$

On traite la contributions des entiers q -singuliers $d \leq (\log x)^B$ en utilisant (8.4). Dans le domaine $\exp((\log_2 x)^{2+\varepsilon}) \leq y \ll q^3 x^3$, l'estimation

$$\rho\left(u - \frac{\log d}{\log y}\right) = \rho(u) \left(1 + O\left(\frac{\log d \log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

entraîne, en utilisant (4.28), que l'on a,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d \leq (\log x)^B \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(d) \sum_{\substack{x/d < n \leq (1+\eta)x/d \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n) &= \sum_{\substack{d \leq (\log x)^B \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \lambda_0(1) \eta x \rho(u) \\ &\quad + O\left(\eta x \rho(u) C^{\omega(q)} \log(q+1)^4 \frac{\log(u+1)}{\log y}\right). \end{aligned}$$

On complète la somme sur d ci-dessus en estimant l'erreur ainsi produite à l'aide de la méthode de Rankin et de (4.29). Quitte à choisir B suffisamment grand, il vient ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d \leq (\log x)^c \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(d)}{d} \sum_{\substack{x/d < n \leq (1+\eta)x/d \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n) &= \frac{\eta x \rho(u)}{\zeta_q(2) \sigma_q(F)} \\ &\quad + O\left(\eta x \rho(u) C^{\omega(q)} \log(q+1)^4 \frac{\log(u+1)}{\log y}\right). \end{aligned}$$

Au vu de la majoration triviale

$$\sum_{\substack{x/d < n \leq (1+\eta)x/d \\ P^+(n) \leq y \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}(n) \leq M_{\tilde{\sigma}_q^{\mathbf{Z}}}((1+\eta)x/d)$$

on estime la contribution des entiers $d > (\log x)^B$ en utilisant (4.23) et (8.4) et l'on obtient finalement

$$\sum_{\substack{x < n \leq (1+\eta)x \\ P^+(n) \leq y}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) = \frac{\eta x \rho(u)}{\zeta_q(2) \sigma_q(F)} + O\left(\eta x \left(\rho(u) C^{\omega(q)} \log(q+1)^4 \frac{\log(u+1)}{\log y} + \eta\right)\right).$$

En observant que, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on a l'estimation

$$\rho\left(3u + \frac{\log(c(N_1, N_2)q^3)}{\log y}\right) = \rho(3u) \left(1 + O\left(\frac{\log_2 x \log(u+1)}{\log y}\right)\right),$$

on en déduit le résultat. \square

La proposition précédente entraîne que, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et dans le domaine (1.10) défini par

$$x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y,$$

on a

$$\frac{\eta\sigma_q(F)}{c(N_1, N_2)q^3x}S(\mathcal{B}; \sigma_q 1_{S(y)}) = \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)}\rho(3u) + O\left(\frac{\eta^2 x^2}{(\log_2 x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

Raisonnant comme dans la preuve du théorème 1.1 en utilisant (2.12), on déduit le théorème 1.2 de (8.1) et (8.2).

RÉFÉRENCES

- [BBDT12] A. Balog, V. Blomer, C. Dartyge, and G. Tenenbaum. Friable values of binary forms. *Comment. Math. Helv.*, 87(3) :639–667, 2012.
- [Bom76] E. Bombieri. The asymptotic sieve. *Rend. Accad. Naz. XL (5)*, 1/2 :243–269 (1977), 1975/76.
- [Bro11] T. Browning. Power-free values of polynomials. *Arch. Math. (Basel)*, 96(2) :139–150, 2011.
- [CP05] R. Crandall and C. Pomerance. *Prime numbers, a computational perspective*. Springer, New York, second edition, 2005.
- [Dan99] S. Daniel. On the divisor-sum problem for binary forms. *J. Reine Angew. Math.*, 507 :107–129, 1999.
- [dB66] N. G. de Bruijn. On the number of positive integers $\leq x$ and free prime factors $> y$. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math.*, 28 :239–247, 1966.
- [Del71] H. Delange. Sur des formules de Atle Selberg. *Acta Arith.*, 19 :105–146. (errata insert), 1971.
- [dlBB06] R. de la Bretèche and T. D. Browning. Sums of arithmetic functions over values of binary forms. *Acta Arith.*, 125(3) :291–304, 2006.
- [dlBT12] R. de la Bretèche and G. Tenenbaum. Moyennes de fonctions arithmétiques de formes binaires. *Mathematika*, 58(2) :290–304, 2012.
- [dlBT13] R. de la Bretèche and G. Tenenbaum. Sur la conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet. *J. Inst. Math. Jussieu*, 12(4) :759–819, 2013.
- [FI10] J. Friedlander and H. Iwaniec. *Opera de cribro*, volume 57 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Gra08] A. Granville. Smooth numbers : computational number theory and beyond. In *Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography*, volume 44 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 267–323. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [Gre70] G. Greaves. On the divisor-sum problem for binary cubic forms. *Acta Arith.*, 17 :1–28, 1970.
- [Gre71] G. Greaves. Large prime factors of binary forms. *J. Number Theory*, 3 :35–59, 1971.
- [Gre92] G. Greaves. Power-free values of binary forms. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 43(169) :45–65, 1992.
- [HB01] D. R. Heath-Brown. Primes represented by $x^3 + 2y^3$. *Acta Math.*, 186(1) :1–84, 2001.
- [HBM02] D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz. Primes represented by binary cubic forms. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 84(2) :257–288, 2002.
- [HBM04] D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz. On the representation of primes by cubic polynomials in two variables. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 88(2) :289–312, 2004.
- [Hel] H. Helfgott. The parity problem for irreducible cubic forms. <http://arxiv.org/abs/math/0501177>.
- [HR74] H. Halberstam and H.-E. Richert. *Sieve methods*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974. London Mathematical Society Monographs, No. 4.
- [HTW08] G. Hanrot, G. Tenenbaum, and J. Wu. Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 96(1) :107–135, 2008.
- [Lan18] E. Landau. Über Ideale und Primideale in Idealklassen. *Math. Z.*, 2(1-2) :52–154, 1918.
- [Lan89] B. Landreau. A new proof of a theorem of van der Corput. *Bull. London Math. Soc.*, 21(4) :366–368, 1989.
- [Nar04] W. Narkiewicz. *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [Sel52] A. Selberg. On elementary methods in primenumber-theory and their limitations. In *Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949*, pages 13–22. Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo, 1952.
- [Shi80] P. Shiu. A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions. *J. Reine Angew. Math.*, 313 :161–170, 1980.

- [Ten90] G. Tenenbaum. Sur une question d'Erdős et Schinzel. In *A tribute to Paul Erdős*, pages 405–443. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [Ten08] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Échelles. Belin, 3ième édition edition, 2008.

INSTITUT ÉLIE CARTAN, UNIVERSITÉ DE LORRAINE 1, B.P. 70239,
54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY CEDEX, FRANCE
E-mail address: `armand.lachand@univ-lorraine.fr`